Universidad Autónoma Metropolitana

Unidad Iztapalapa
División de Ciencias Básicas e Ingenierías

Proyecto Terminal II

Investigación Teórica:

Conexiones Astrofísicas: Electrodinámica No Lineal desde Agujeros Negros a Estrellas de Neutrones. Parte II

Para Obtener el Título de
Licenciado en Física
presenta:

Jactthar Escamilla Edwin Ismael
Matrícula: 2203043950

Asesor/Coordinador:

Dr. Maceda Santamaría Marco Antonio

Iztapalapa, Ciudad De México, Enero de 2025

RESUMEN

El trabajo se centra en entender como las teorías de electrodinámica no lineal (NLEDs) afectan a las estrellas de neutrones, particularmente en la descripción de sus efectos gravitacionales y electromagnéticos, a través de la construcción de una métrica efectiva y sus consecuencias. Además se comparan gráficamente para las teorías de Heisenberg-Euler (HE), Born-Infeld (BI) y ModMax (MM).

Palabras clave: Estrellas de neutrones, Electrodinámica no lineal, Heisenberg-Euler, Born-Infeld, ModMax, Métrica efectiva.

ABSTRACT

This work focuses on understanding how nonlinear electrodynamics theories (NLEDs) affect neutron stars, particularly in the description of their gravitational and electromagnetic effects, through the construction of an effective metric and its consequences. Additionally, graphical comparisons are made for the Heisenberg-Euler (HE), Born-Infeld (BI), and ModMax (MM) theories.

Keywords: Neutron stars, Nonlinear electrodynamics, Heisenberg-Euler, Born-Infeld, ModMax, Effective metric.

ÍNDICE

Introducción **1**

1 Teoría Heisenberg-Euler en Estrellas de Neutrones **2**

1.1 Métrica Efectiva en el Formalismo de Plebański 2

1.2 Efectos Gravitacionales 7

Corrimiento al Rojo 7

Precesión de Lense-Thirring 10

2 Teoría Born-Infeld en Estrellas de Neutrones **13**

2.1 Métrica Efectiva y Comparación con la Geométrica 13

2.2 Efectos Gravitacionales 16

Corrimiento al Rojo 16

Precesión de Lense-Thirring 18

3 Teoría ModMax en Estrellas de Neutrones **20**

3.1 Descripción de la Teoría ModMax 20

Solución de Tipo Agujero Negro 22

3.2 Métrica Efectiva y Métrica Geométrica en ModMax 25

3.3 Efectos Gravitacionales 27

Corrimiento al Rojo 27
Precesión de Lense-Thirring 30

Conclusiones **31**

A Efectos Observacionales **33**

Agradecimientos **37**

Bibliografía **iii**

A Xia,

PORQUE TU EMPUJE ME LLEVO A TODO ESTO.

"El búho de Minerva solo levanta el vuelo en el crepúsculo."

-Friedrich Hegel

INTRODUCCIÓN

En el presente trabajo se retomarán las bases estudiadas y desarrolladas en la primera parte, para así realizar un estudio más profundo del comportamiento de las teorías de electrodinámica no lineal (NLEDs, Nonlinear Electrodynamics). Se tomarán como punto de partida los trabajos [Mosquera Cuesta and Salim(2004)] y [Cuesta and Salim(2004)] sobre efectos gravitacionales, así como los artículos [Denisov, Denisova, and Svertilov(2004)] y [Denisov and Svertilov(2005)] en relación con las interacciones electromagnéticas.

Como consecuencia directa, se construirá la métrica efectiva asociada a cada una de estas NLEDs, utilizando el formalismo de Plebański, para compararla con la métrica geométrica. Este enfoque posibilitará un análisis detallado de la propagación de la luz en espacios curvados, poniendo especial énfasis en fenómenos relevantes como el corrimiento al rojo gravitacional y la precesión del fenómeno de Lense-Thirring en estrellas de neutrones rotantes.

Finalmente, se implementará una descripción de la electrodinámica no lineal en estrellas de neutrones utilizando la teoría ModMax, comparando su modelado con el de los agujeros negros. Se destacarán las diferencias teóricas y observacionales entre estos cuerpos compactos, prestando particular atención a la influencia de las capas externas de las estrellas de neutrones sobre efectos de los campos gravitacional y electromagnético.

1 TEORÍA HEISENBERG-EULER EN ESTRELLAS DE NEUTRONES

Se analizará la teoría de Heisenberg-Euler en el contexto de las estrellas de neutrones, considerando las correcciones cuánticas que afectan las trayectorias de la luz en medios no lineales. Esto permitirá analizar los fenómenos gravitacional y observacional asociados a la métrica efectiva obtenida mediante el formalismo de Plebański, destacando la importancia de estas correcciones en la comprensión de los fenómenos físicos.

1.1 Métrica Efectiva en el Formalismo de Plebański

Partiendo de un 4-vector nulo $k_\mu = (\omega, \vec{k})$ definimos a la métrica efectiva como

$$g_{\text{ef}}^{\mu\nu} k_\mu k_\nu \equiv 0, \tag{1.1}$$

lo que permitirá obtener dos métricas derivadas de los efectos de birrefringencia presentes en la teoría Heisenberg-Euler, asociados a los estados de polarización. Con discontinuidades de superficie dadas por los campos y denotadas por el tensor $f_{\mu\nu}$, las ecuaciones de movimiento se definen por la densidad lagrangiana $\mathcal{L}$ dependiente de los campos escalar $\mathscr{G}$ y pseudoescalar $\mathscr{P}$, mediante

$$\mathcal{L}_{HE} = -\mathscr{G} + \beta\mathscr{G}^2 + \frac{\gamma}{2}\mathscr{P}^2 = \frac{\vec{E}^2 - \vec{B}^2}{2} + \frac{\beta}{4}\left(\vec{E}^2 - \vec{B}^2\right)^2 + \frac{\gamma}{2}\left(\vec{E}\cdot\vec{B}\right)^2, \tag{1.2}$$

donde los parámetros son $\beta = \frac{8\alpha_F^2}{45m_e^2}$ & $\gamma = \frac{28\alpha_F^2}{45m_e^2}$ con α siendo la constante de estructura fina. Las discontinuidades en el campo están dadas por las siguientes ecuaciones

$$[\mathcal{F}_{\alpha\beta}]_\Sigma = 0, \tag{1.3a}$$

$$[\mathcal{F}_{\alpha\beta,\mu}]_\Sigma = f_{\alpha\beta}k_\mu, \tag{1.3b}$$

con Σ denotando la superficie global que divide el espacio-tiempo [Plebański(1970)] y $\mathcal{F}_{\alpha\beta}$ siendo el tensor electromagnético; en consecuencia podemos establecer las identidades de Bianchi como

$$f_{\alpha\beta}k_\mu + f_{\beta\mu}k_\alpha + f_{\mu\alpha}k_\beta = 0. \tag{1.4}$$

Así pues, de acuerdo con [De Lorenci *et al.*(2000)De Lorenci, Klippert, Novello, and Salim] es posible obtener cantidades escalares para la relación de (1.4) con el tensor de Faraday, su dual y el vector de propagación k_μ; definiendolas por

$$\zeta \equiv \mathcal{F}^{\alpha\beta}f_{\alpha\beta}, \tag{1.5a}$$

$$\zeta^* \equiv \overset{*}{\mathcal{F}}^{\alpha\beta}f_{\alpha\beta}, \tag{1.5b}$$

al establecer $k^2 \equiv \eta^{\mu\nu}k_\mu k_\nu \neq 0$ y usando las relaciones entre las ecuaciones (1.3), (1.4) y los tensores electromagnéticos se obtienen las ecuaciones acopladas

$$\zeta k^2 = \frac{4}{\mathcal{L}_{\mathscr{G}}}\mathcal{F}^{\mu\nu}\mathcal{F}^{\vartheta}_{\mu}k_{nu}k_\vartheta\left(\mathcal{L}_{\mathscr{G}\mathscr{G}}\zeta + \mathcal{L}_{\mathscr{G}\mathscr{P}}\zeta^*\right) - \frac{k^2\mathscr{P}}{\mathcal{L}_{\mathscr{G}}}\left(\mathcal{L}_{\mathscr{G}\mathscr{P}}\zeta + \mathcal{L}_{\mathscr{P}\mathscr{P}}\zeta^*\right), \tag{1.6a}$$

$$\zeta^* k^2 = \tfrac{4}{\mathcal{L}_{\mathscr{G}}}\mathcal{F}^{\vartheta}_{\mu}k_\nu k_\vartheta\left(\mathcal{L}_{\mathscr{G}\mathscr{P}}\zeta + \mathcal{L}_{\mathscr{P}\mathscr{P}}\zeta^*\right) - \tfrac{k^2\mathscr{P}}{\mathcal{L}_{\mathscr{G}}}\left(\mathcal{L}_{\mathscr{G}\mathscr{G}}\zeta + \mathcal{L}_{\mathscr{G}\mathscr{P}}\zeta^*\right) + \tfrac{2k^2\mathscr{G}}{\mathcal{L}_{\mathscr{G}}}\left(\mathcal{L}_{\mathscr{G}\mathscr{P}}\zeta + \mathcal{L}_{\mathscr{P}\mathscr{P}}\zeta^*\right). \tag{1.6b}$$

En consecuencia se establece la relación algebraica $\Omega_1\zeta^{*2} + \Omega_2\zeta\zeta^* + \Omega_3\zeta^2 = 0$ donde tomaremos los coeficientes de acuerdo con las siguientes definiciones

$$\Omega_1 \equiv -\mathcal{L}_{\mathscr{G}\mathscr{P}} + \frac{2\mathscr{G}}{\mathcal{L}_{\mathscr{G}}}\mathcal{L}_{\mathscr{G}\mathscr{P}}\mathcal{L}_{\mathscr{P}\mathscr{P}} + \frac{\mathscr{P}}{\mathcal{L}_{\mathscr{G}}}\left(\mathcal{L}^2_{\mathscr{P}\mathscr{P}} - \mathcal{L}^2_{\mathscr{G}\mathscr{P}}\right), \tag{1.7a}$$

$$\Omega_2 \equiv \mathcal{L}_{\mathscr{P}\mathscr{P}} - \mathcal{L}_{\mathscr{G}\mathscr{G}} + \frac{2\mathscr{G}}{\mathcal{L}_{\mathscr{G}}}\left(\mathcal{L}^2_{\mathscr{G}\mathscr{P}} + \mathcal{L}_{\mathscr{G}\mathscr{G}}\mathcal{L}_{\mathscr{P}\mathscr{P}}\right) + \frac{2\mathscr{P}}{\mathcal{L}_{\mathscr{G}}}\left(\mathcal{L}_{\mathscr{G}\mathscr{P}}\mathcal{L}_{\mathscr{P}\mathscr{P}} - \mathcal{L}_{\mathscr{G}\mathscr{G}}\mathcal{L}_{\mathscr{G}\mathscr{P}}\right), \tag{1.7b}$$

$$\Omega_3 \equiv \mathcal{L}_{\mathscr{G}\mathscr{P}} + \frac{2\mathscr{G}}{\mathcal{L}_{\mathscr{G}}}\mathcal{L}_{\mathscr{G}\mathscr{G}}\mathcal{L}_{\mathscr{G}\mathscr{P}} + \frac{\mathscr{P}}{\mathcal{L}_{\mathscr{G}}}\left(\mathcal{L}^2_{\mathscr{G}\mathscr{P}} - \mathcal{L}^2_{\mathscr{G}\mathscr{G}}\right). \tag{1.7c}$$

Por lo tanto, la solución a la relación algebraica antes mencionada está dada por la igualdad $\zeta^* = \Omega_\pm\zeta$ donde

$$\Omega_\pm = \frac{-\Omega_2 \pm \sqrt{\Omega_2^2 - 4\Omega_1\Omega_3}}{2\Omega_1}. \tag{1.8}$$

Sustituyendo los resultados en las ecuaciones acopladas (1.6) se pueden despreciar las cantidades escalares obteniendo la ecuación

$$\left[1 + \frac{\mathscr{P}}{\mathcal{L}_{\mathscr{G}}}\left(\mathcal{L}_{\mathscr{G}\mathscr{P}} + \Omega_\pm\mathcal{L}_{\mathscr{P}\mathscr{P}}\right)\right]k^2 - \frac{4}{\mathcal{L}_{\mathscr{G}}}\left(\mathcal{L}_{\mathscr{G}\mathscr{G}} + \Omega_\pm\mathcal{L}_{\mathscr{G}\mathscr{P}}\right)\mathcal{F}^{\mu\nu}\mathcal{F}^{\vartheta}_{\mu}k_\nu k_\vartheta = 0.$$

Simplificando la expresión respecto de k^2 es posible identificar los índices de reflexión del efecto de birrefringencia como

$$\lambda_\pm = -\frac{4\left(\mathcal{L}_{\mathscr{G}\mathscr{G}} + \Omega_\pm\mathcal{L}_{\mathscr{G}\mathscr{P}}\right)}{\mathcal{L}_{\mathscr{G}} + \mathscr{P}\left(\mathcal{L}_{\mathscr{G}\mathscr{P}} + \Omega_\pm\mathcal{L}_{\mathscr{P}\mathscr{P}}\right)}\mathcal{F}^{\vartheta\mu}\mathcal{F}^{\nu}_{\vartheta}k_\mu k_\nu. \tag{1.9}$$

Así pues, bajo la definición $k^2 = -\mathscr{Q}_\pm\mathcal{T}^{\mu\nu}k_\mu k_\nu$ establecida en el mismo artículo [De Lorenci *et al.*(2000)De Lorenci, Klippert, Novello, and Salim] y relacionada con las derivadas del lagrangiano, podemos hacer uso de la ecuación (1.1) y llegar a la definición correspondiente a la métrica inversa de la Dra. Guzmán en [Guzman Herrera(2024)]:

$$\mathscr{g}^{\mu\nu}_{\mathrm{ef}\pm} = \mathscr{g}^{\mu\nu} - \frac{4\left(\mathcal{L}_{\mathscr{G}\mathscr{G}} + \Omega_\pm\mathcal{L}_{\mathscr{G}\mathscr{P}}\right)}{\mathcal{L}_{\mathscr{G}} + \mathscr{P}\left(\mathcal{L}_{\mathscr{G}\mathscr{P}} + \Omega_\pm\mathcal{L}_{\mathscr{P}\mathscr{P}}\right)}t^{\mu\nu}:\ t^{\mu\nu} \equiv \mathcal{F}^{\mu\vartheta}\mathcal{F}^{\nu}_{\vartheta}. \tag{1.10}$$

Por lo tanto, dada la densidad lagrangiana de la teoría Heisenberg-Euler establecida en (1.2), tomamos sus derivadas respecto a los invariantes:

$$\mathcal{L}^{HE}_{\mathscr{G}} = \frac{\partial \mathcal{L}_{HE}}{\partial \mathscr{G}} = -1 + 2\beta\mathscr{G}, \quad \mathcal{L}^{HE}_{\mathscr{G}\mathscr{G}} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{HE}}{\partial \mathscr{G}^2} = 2\beta,$$

$$\mathcal{L}^{HE}_{\mathscr{P}} = \frac{\partial \mathcal{L}_{HE}}{\mathscr{P}} = \gamma\mathscr{P}, \quad \mathcal{L}^{HE}_{\mathscr{P}\mathscr{P}} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{HE}}{\partial \mathscr{P}^2} = \gamma,$$

$$\mathcal{L}^{HE}_{\mathscr{G}\mathscr{P}} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{HE}}{\partial \mathscr{G} \partial \mathscr{P}} = 0.$$

En consecuencia, es posible calcular los coeficientes (1.7) y la respectiva solución descrita para $\Omega_\pm$ como

$$\Omega_\pm = \frac{4\beta\mathscr{G} - 6\gamma\mathscr{G} + \gamma\beta^{-1} - 2 \pm \sqrt{[\gamma\beta^{-1} + 4\beta\mathscr{G} - 2(1+3\gamma\mathscr{G})]^2 + 16\gamma^2\mathscr{P}^2}}{2\gamma^2\beta^{-1}\mathscr{P}}. \tag{1.11}$$

Esto conlleva a tener los índices de reflexión en la forma

$$\lambda_\pm = -\frac{8\beta}{2\beta\mathscr{G} - 1 + \frac{\gamma\mathscr{P}\left[4\beta\mathscr{G} - 6\gamma\mathscr{G} - 2 + \gamma\beta^{-1} \pm \sqrt{[\gamma\beta^{-1} + 4\beta\mathscr{G} - 2(1+3\gamma\mathscr{G})]^2 + 16\gamma^2\mathscr{P}^2}\right]}{2\gamma^2\beta^{-1}\mathscr{P}}} \mathcal{F}^{\mu\vartheta}\mathcal{F}^{\nu}_{\vartheta} k_\mu k_\nu.$$

Además, debido a la naturaleza de β y γ como valores pequeños, es posible simplificar las expresión anterior al despreciar los productos $\gamma\beta$ y la potencia γ^2, ambas fuera de la raíz, obteniendo así la aproximación

$$\lambda_\pm \approxeq -\frac{8\beta}{2\beta\mathscr{G} - 1 + \frac{-2\gamma\mathscr{P} + \gamma^2\beta^{-1}\mathscr{P} \pm \gamma\mathscr{P}\sqrt{[\gamma\beta^{-1} + 4\beta\mathscr{G} - 2(1+3\gamma\mathscr{G})]^2 + 16\gamma^2\mathscr{P}^2}}{2\gamma^2\beta^{-1}\mathscr{P}}} \mathcal{F}^{\mu\vartheta}\mathcal{F}^{\nu}_{\vartheta} k_\mu k_\nu. \tag{1.12}$$

En consecuencia se puede identificar que la métrica efectiva está dada por la siguiente ecuación

$$\mathscr{g}^{\mu\nu}_{\mathrm{ef}\pm} = \mathscr{g}^{\mu\nu} - \frac{8\beta}{2\beta\mathscr{G} - 1 + \Omega_\pm\gamma\mathscr{P}}\, t^{\mu\nu}. \tag{1.13}$$

Dado que durante la primera parte del presente trabajo [Jactthar Escamilla(2024)] se distinguió que recuperamos efectos lineales en el límite $\beta \to 0$, podemos ver que la métrica efectiva en este mismo límite actúa solamente como la métrica geométrica, es decir, $\mathcal{g}^{\mu\nu}_{\text{ef}} = \mathcal{g}^{\mu\nu}$.

Para simplificar el tratamiento de la métrica efectiva, es importante recordar que, en el caso de las estrellas de neutrones, los campos cumplen la desigualdad $B \gg E$, lo que relaciona los invariantes en la ecuación (1.2). Esto implica que $\mathscr{G} \approx \frac{\vec{B}^2}{2}$ sin alterar $\mathscr{P} = \vec{E} \cdot \vec{B}$. Por lo tanto, el elemento que involucra el término $\Omega_\pm$ en los coeficientes de reflexión pueden simplificarse, denotándolos por la letra $\varsigma_\pm$:

$$\varsigma_\pm = \frac{-2\gamma EB + \gamma^2\beta^{-1}EB \pm \gamma EB\sqrt{[\gamma\beta^{-1} + 4\beta B^2 - 2(1+3\gamma B^2)]^2 + 16\gamma^2E^2B^2]}}{2\gamma^2\beta^{-1}EB}.$$

Al simplificar la expresión en términos de los campos obtenemos una potencia de grado cuatro para el campo magnético dentro de la raíz, cantidad que será de mayor magnitud que el resto del discriminante, posteriormente será mayor al numerador de la fracción por lo que es posible reducir solo al término involucrado en la raíz. En síntesis, la relación de los campos permite tomar la siguiente aproximación como consecuencia

$$\varsigma_\pm \approxeq \pm\beta B^2\left(\frac{2\beta - 3\gamma}{\gamma}\right). \tag{1.14}$$

Ergo, los coeficientes de reflexión para el caso de la teoría Heisenberg-Euler se reducen a la expresión

$$\lambda_\pm \approxeq -\frac{8\beta}{2\beta B^2 - 1 + \varsigma_\pm}\mathcal{F}^{\vartheta\mu}\mathcal{F}^{\nu}_{\vartheta}k_\mu k_\nu = -\frac{8\beta}{2\beta B^2 - 1 \pm \beta B^2\left(\frac{2\beta-3\gamma}{\gamma}\right)}\mathcal{F}^{\vartheta\mu}\mathcal{F}^{\nu}_{\vartheta}k_\mu k_\nu, \tag{1.15}$$

dado que la métrica efectiva debe considerar los efectos no lineales no se debe reducir la expresión más allá de la sustitución de σ en la ecuación anterior, entonces para el caso HE

tenemos la expresión

$$\mathscr{g}_{\text{ef}}^{\mu\nu} \approxeq \mathscr{g}^{\mu\nu} - \frac{8\beta}{2\beta B^2 - 1 \pm \beta B^2 \left(\frac{2\beta - 3\gamma}{\gamma}\right)} t^{\mu\nu}. \tag{1.16}$$

1.2 Efectos Gravitacionales

En esta sección se analizarán las consecuencias de la métrica efectiva derivada de la teoría de Heisenberg-Euler sobre los efectos gravitacionales, haciendo énfasis en la interacción de los campos electromagnéticos intensos y su impacto en fenómenos como la longitud de onda de la radiación electromagnética y la curvatura del espacio-tiempo.

Estas correcciones permiten describir de manera más precisa los procesos físicos en entornos extremos como las cercanías de estrellas de neutrones, donde los campos gravitacionales y electromagnéticos alcanzan intensidades significativas; además, contribuyen a una mejor comprensión de los fenómenos observacionales, al ofrecer un marco teórico que conecta las modificaciones en la propagación de la luz con las características internas de los cuerpos compactos.

Corrimiento al Rojo

Para comenzar, se analizará cómo la métrica efectiva derivada de la teoría de Heisenberg-Euler modifica la frecuencia de la radiación electromagnética en estrellas de neutrones. Este análisis considerará tanto el caso interno, utilizando la métrica asociada a la solución Tolman-Oppenheimer-Volkoff, como el caso externo, basado en la métrica de Schwarzschild. La comparación entre estas métricas permitirá evaluar las correcciones inducidas por la electrodinámica no lineal sobre el corrimiento al rojo gravitacional, destacando su relevancia en la interpretación de las señales provenientes.

Con base en el corrimiento al rojo de líneas espectrales debemos considerar una transformación de sistemas coordenados $x^\mu \to \tilde{x}^\mu$, de tal forma que se medirá la energía con intención

de comparar las características de los fotones en dos posiciones distintas, con una velocidad $\tilde{U}^\mu = (1,0,0,0)$ en el punto P que implica, por la notación, una energía $E = c\tilde{p}^0 = c\tilde{p}_0$ tal que el momento es $\tilde{p}_0 = \tilde{p}_\nu \tilde{U}^\nu = \tilde{g}_{\mu\nu}\tilde{p}^\mu \tilde{U}^\nu$; por otra parte, para cualquier posición $E = cp_\mu U^\mu$, llegando así a la igualdad establecida en [Papapetrou(1974)]

$$\frac{E}{c} = p_\mu(P)U^\mu(P) = p_\mu(Q)U^\mu(Q).$$

Tomando en cuenta que ambas velocidades tienen componentes espaciales nulas, la expresión anterior se reduce a $p_0(P)U^0(P) = p_0(Q)U^0(Q)$; además por $g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = 1$, la relación de apoyo es $g_{00}(P)[U^0(P)]^2 = g_{00}(Q)[U^0(Q)]^2$. Es decir,

$$\frac{U^0(Q)}{U^0(P)} = \sqrt{\frac{g_{00}(P)}{g_{00}(Q)}}, \tag{1.17}$$

mientras que los momentos y las velocidades son $\frac{p_0(P)}{p_0(Q)} = \frac{U^0(Q)}{U^0(P)}$, por lo que la relación corresponde a

$$\frac{p_0(P)}{p_0(Q)} = \sqrt{\frac{g_{00}(P)}{g_{00}(Q)}}. \tag{1.18}$$

Finalmente, usando $E = cp_0 = hf$ donde f es la frecuencia del fotón con P siendo el punto de emisión, Q el punto de observación

$$\frac{f_{\text{em}}}{f_{\text{ob}}} = \sqrt{\frac{g_{00}^{\text{em}}}{g_{00}^{\text{ob}}}}. \tag{1.19}$$

Por la definición del corrimiento al rojo $z + 1 = \frac{f_{\text{ob}}}{f_{\text{em}}}$, sustituyendo la ecuación anterior; se reescribe en términos de la métrica como

$$z + 1 = \sqrt{\frac{g_{00}^{\text{ob}}}{g_{00}^{\text{em}}}}. \tag{1.20}$$

Usaremos para las métricas de observación las soluciones dadas por los elementos de línea TOV y Schwarzschild, que son respectivamente

$$ds^2 = -e^{\nu(r)}dt^2 + e^{\lambda(r)}dr^2 + r^2 d\Omega^2, \tag{1.21a}$$

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \tag{1.21b}$$

donde $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$.

Sin embargo, para el caso de la emisión usaremos la métrica efectiva inversa obtenida en (1.16), por lo que debemos calcular sus componentes y obtener en consecuencia la forma covariante de la métrica efectiva, por simplicidad trataremos con la aproximación a primer orden

$$(g^{\mu\nu}_{\rm ef})^{-1} = g^{\rm ef}_{\mu\nu} \simeq g_{\mu\nu} + \psi_\pm h_{\mu\nu} + \mathcal{O}(\psi_\pm^2).$$

Como $\psi_\pm$ es el término que involucra las correcciones de las NLEDs es posible despreciar los términos cuadráticos ya que las correcciones son de orden pequeño; entonces, como $g^{\rm ef}_{\mu\nu} g^{\nu\lambda}_{\rm ef} = \delta^\lambda_\mu$, se puede obtener una expresión de tipo

$$(g_{\mu\varkappa} + \psi_\pm h_{\mu\varkappa})(g^{\varkappa\lambda} - \psi_\pm t^{\varkappa\lambda}) = \delta^\lambda_\mu - \psi_\pm g_{\mu\varkappa} t^{\varkappa\lambda} + \psi_\pm h_{\mu\varkappa} g^{\varkappa\lambda} + \Theta(\psi_\pm^2) = \delta^\lambda_\mu,$$

que implica $-\psi_\pm g_{\mu\varkappa} t^{\varkappa\lambda} + \psi_\pm g^{\varkappa\lambda} h_{\mu\varkappa} = 0$. Por lo tanto la perturbación en la métrica queda definida como

$$h_{\mu\nu} = g_{\lambda\nu} g_{\mu\varkappa} t^{\varkappa\lambda}. \tag{1.22}$$

Haciendo uso del elemento de línea (1.21a), la forma matricial de la métrica efectiva correspondiente es

$$g^{\rm ef}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -e^{\nu(r)} - e^{2\nu(r)}E^2\psi_\pm & -e^{\lambda(r)+\nu(r)}(B_yE_z - B_zE_y)\psi_\pm & -e^{\nu(r)}r^2(B_zE_x - B_xE_z)\psi_\pm & -e^{\nu(r)}r^2\sin^2\theta(B_xE_y - B_yE_x)\psi_\pm \\ -e^{\lambda(r)+\nu(r)}(B_yE_z - B_zE_y)\psi_\pm & e^{\lambda(r)} + e^{2\lambda(r)}(E_x^2 - B_y^2 - B_z^2)\psi_\pm & e^{\lambda(r)}r^2(E_xEy + B_xB_y)\psi_\pm & e^{\lambda(r)}r^2\sin^2\theta(E_xE_z + B_xB_z)\psi_\pm \\ e^{\nu(r)}r^2(B_zE_x - B_xE_z)\psi_\pm & e^{\lambda(r)}r^2(E_xEy + B_xB_y)\psi_\pm & r^2 + r^4(E_y^2 - B_x^2 - B_z^2)\psi_\pm & r^4\sin^2\theta(E_yE_z + B_yB_z)\psi_\pm \\ -e^{\nu(r)}r^2\sin^2\theta(B_xE_y - B_yE_x)\psi_\pm & e^{\lambda(r)}r^2\sin^2\theta(E_xE_z + B_xB_z)\psi_\pm & r^4\sin^2\theta(E_yE_z + B_yB_z)\psi_\pm & r^2\sin^2\theta + r^4\sin^4\theta(E_z^2 - B_x^2 - B_y^2)\psi_\pm \end{pmatrix}, \tag{1.23}$$

mientras que para el caso de la solución de Schwarzschild, con $f(r) = 1 - \frac{2M}{r}$, tenemos

$$g^{\text{ef}}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -f(r) - f^2(r)E^2\psi_\pm & (B_zE_y - B_yE_z)\psi_\pm & r^2f(r)(B_xE_z - B_zE_x)\psi_\pm & r^2f(r)\sin^2\theta(B_yE_x - B_xE_y)\psi_\pm \\ (B_zE_y - B_yE_z)\psi_\pm & \frac{1}{f(r)} + \frac{(E_x^2 - B_y^2 - B_z^2)}{f^2(r)}\psi_\pm & \frac{r^2(E_xEy + B_xB_y)}{f(r)}\psi_\pm & \frac{r^2\sin^2\theta(E_xE_z + B_xB_z)}{f(r)}\psi_\pm \\ r^2f(r)(B_xE_z - B_zE_x)\psi_\pm & \frac{r^2(E_xEy + B_xB_y)}{f(r)}\psi_\pm & r^2 + r^4(E_y^2 - B_x^2 - B_z^2)\psi_\pm & r^4\sin^2\theta(E_yE_z + B_yB_z)\psi_\pm \\ r^2f(r)\sin^2\theta(B_yE_x - B_xE_y)\psi_\pm & \frac{r^2\sin^2\theta(E_xE_z + B_xB_z)}{f(r)}\psi_\pm & r^4\sin^2\theta(E_yE_z + B_yB_z)\psi_\pm & r^2\sin^2\theta + r^4\sin^4\theta(E_z^2 - B_x^2 - B_y^2)\psi_\pm \end{pmatrix}, \tag{1.24}$$

Por lo tanto, el corrimiento consecuente de la teoría HE está dado por las ecuaciones

$$1 + z_{TOV} = \sqrt{\frac{2\beta B^2 - 1 \pm \beta\gamma^{-1}B^2(2\beta - 3\gamma)}{8e^{\nu(r)}\beta E^2 + 2\beta B^2 - 1 \pm \beta\gamma^{-1}B^2(2\beta - 3\gamma)}}, \tag{1.25a}$$

$$1 + z_{Sch} = \sqrt{\frac{2\beta B^2 - 1 \pm \beta\gamma^{-1}B^2(2\beta - 3\gamma)}{8\beta E^2\left(1 - \frac{2M}{r}\right) + 2\beta B^2 - 1 \pm \beta\gamma^{-1}B^2(2\beta - 3\gamma)}}. \tag{1.25b}$$

Como podemos ver en la primera ecuación, la contribución del campo eléctrico sigue presente debido a que la exponencial contribuye a conservarlo. Por otra parte si despreciamos el campo eléctrico para el caso externo, se recuperaría la unidad, por ello se mantiene en la ecuación.

Precesión de Lense-Thirring

Para analizar las consecuencias de las electrodinámicas no lineales (NLEDs) en el efecto de precesión de Lense-Thirring, es fundamental entender que este fenómeno resulta de las perturbaciones en la métrica asociadas a los términos $dtd\phi$. Dichas perturbaciones están relacionadas con el momento angular del cuerpo masivo.

La métrica que describe un cuerpo en rotación lenta puede expresarse como:

$$ds^2 = ds^2_{\text{Sch}} - \frac{4J}{r^2}\sin^2\theta(rd\phi)(dt) + \mathcal{O}(J^2), \tag{1.26}$$

donde J representa el momento angular del cuerpo y ds^2_{Sch} corresponde al elemento de línea de Schwarzschild. Esta forma de la métrica, discutida en [Hartle(2021)], es válida bajo la aproximación de rotación lenta.

A partir de esta métrica, se puede derivar el efecto de precesión mediante el uso de la ecuación del giroscopio:

$$\frac{ds^{\alpha}}{d\tau} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} s^{\mu} u^{\nu} = 0, \tag{1.27}$$

lo que permite cuantificar las desviaciones inducidas por las NLEDs en la dinámica del sistema. Para esto consideramos los efectos de perturbación de cualquier métrica efectiva, que están asociados a las componentes

$$g^{\rm ef}_{t\phi} = g^{\rm ef}_{\phi t} = r^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \sin^2\theta (B_y E_x - B_x E_y)\psi_{\pm}, \tag{1.28}$$

Entonces, para el elemento de línea de la ecuación (1.26), las perturbaciones corresponden a la igualdad

$$-\frac{4J}{r}\sin^2\theta = 2r^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \sin^2\theta (B_y E_x - B_x E_y)\psi_{\pm}. \tag{1.29}$$

Por lo tanto, la ecuación para obtener la precesión de Lense-Thirring es

$$\frac{ds^{\phi}}{d\tau} + \Gamma^{\phi}_{t\phi}(s^t u^{\phi} + s^{\phi} u^t) = 0. \tag{1.30}$$

Como resultado, la precesión LT asociada a la conexión afín de la ecuación anterior es

$$\begin{aligned}\Omega^{\rm LT}_{\pm} \equiv \frac{1}{r} - 2r^3 \sin^2\theta[(B_y B_z + E_y E_z)^2 + \sin^2\theta(B_x^2 + B_y^2 - E_z^2)^2]\psi_{\pm}^2 - r\sin^2\theta(B_x^2 + B_y^2 - E_z^2)\psi_{\pm} \\ + \left(\frac{r\sin\theta(B_x B_z + E_x E_z)}{2\left(1-\frac{2M}{r}\right)^2}\right)\left[r\cos\theta\left(1-\frac{2M}{r}\right)^3 (B_y E_x - B_x E_y) - \sin\theta\left(1-\frac{3M}{r}\right)(E_x E_z + B_x B_z)\right]\psi_{\pm}^2.\end{aligned} \tag{1.31}$$

Sustituyendo los valores $\psi_{\pm}$ por los correspondientes a la teoría Heisenberg-Euler

$$\psi^{\rm HE}_{\pm} = \frac{8\beta}{2\beta B^2 - 1 \pm \beta B^2 \left(\frac{2\beta - 3\gamma}{\gamma}\right)}, \tag{1.32}$$

las soluciones para la precesión de Lense-Thirring son

$$\Omega^{\mathrm{LT}}_{\mathrm{HE}+} = \frac{1}{r} - r\sin^2\theta(B_x^2+B_y^2-E_z^2)\left(\frac{8\beta}{\beta B^2\left(2+\frac{2\beta-3\gamma}{\gamma}\right)-1}\right)$$
$$- 2r^2\sin^2\theta[(B_yB_z+E_yE_z)^2+\sin^2\theta(B_x^2+B_y^2-E_z^2)^2]\left(\frac{8\beta}{\beta B^2\left(2+\frac{2\beta-3\gamma}{\gamma}\right)-1}\right)^2$$
$$+\left(\frac{r^2\cos\theta\sin\theta(B_xB_z+E_xE_z)}{2\left(1-\frac{2M}{r}\right)^2}\right)\left(1-\frac{2M}{r}\right)^3(B_yE_x-B_xE_y)\left(\frac{8\beta}{\beta B^2\left(2+\frac{2\beta-3\gamma}{\gamma}\right)-1}\right)^2$$
$$-\left(\frac{r\sin^2\theta(B_xB_z+E_xE_z)}{2\left(1-\frac{2M}{r}\right)^2}\right)\left(1-\frac{3M}{r}\right)(E_xE_z+B_xB_z)\left(\frac{8\beta}{\beta B^2\left(2+\frac{2\beta-3\gamma}{\gamma}\right)-1}\right)^2, \tag{1.33a}$$

$$\Omega^{\mathrm{LT}}_{\mathrm{HE}-} = \frac{1}{r} - r\sin^2\theta(B_x^2+B_y^2-E_z^2)\left(\frac{8\beta}{\beta B^2\left(2-\frac{2\beta-3\gamma}{\gamma}\right)-1}\right)$$
$$- 2r^2\sin^2\theta[(B_yB_z+E_yE_z)^2+\sin^2\theta(B_x^2+B_y^2-E_z^2)^2]\left(\frac{8\beta}{\beta B^2\left(2-\frac{2\beta-3\gamma}{\gamma}\right)-1}\right)^2$$
$$+\left(\frac{r^2\cos\theta\sin\theta(B_xB_z+E_xE_z)}{2\left(1-\frac{2M}{r}\right)^2}\right)\left(1-\frac{2M}{r}\right)^3(B_yE_x-B_xE_y)\left(\frac{8\beta}{\beta B^2\left(2-\frac{2\beta-3\gamma}{\gamma}\right)-1}\right)^2$$
$$-\left(\frac{r\sin^2\theta(B_xB_z+E_xE_z)}{2\left(1-\frac{2M}{r}\right)^2}\right)\left(1-\frac{3M}{r}\right)(E_xE_z+B_xB_z)\left(\frac{8\beta}{\beta B^2\left(2-\frac{2\beta-3\gamma}{\gamma}\right)-1}\right)^2. \tag{1.33b}$$

De nueva cuenta se resalta la importancia del efecto de birrefringencia en la teoría HE.

2

TEORÍA BORN-INFELD EN ESTRELLAS DE NEUTRONES

Se abordará la teoría de Born-Infeld (BI) y su aplicación en estrellas de neutrones, destacando su capacidad para regular la intensidad de los campos eléctricos y magnéticos extremos presentes en estos cuerpos compactos, los cuales generan condiciones extremas tanto en el espacio-tiempo como en la materia circundante. Como en el capítulo anterior, se analizará el impacto gravitacional y observacional asociado a la métrica efectiva derivada de esta teoría, permitiendo así determinar las consecuencias físicas de la electrodinámica no lineal, y cómo estos efectos pueden ser detectados a través de observaciones astrofísicas que involucran luz y otros tipos de radiación en estos entornos extremos.

2.1 Métrica Efectiva y Comparación con la Geométrica

En el caso de la teoría Born-Infeld tomamos el caso general con densidad lagrangiana

$$\mathcal{L}_{BI} = \xi^2 \left[1 - \Pi^\sigma\right] : \Pi = 1 + \frac{\mathscr{G}}{\xi^2 \sigma} - \frac{\mathscr{P}^2}{2\xi^2 \zeta^2 \sigma},$$

donde σ es el parámetro asociado a la generalización de Born-Infeld y $\xi^2 = \left(\frac{1}{\ell^2} + 2\beta\right)^{-1}$ es uno de los dos parámetros de no linealidad que relaciona las teorías HE y BI como se vio en

la sección 3.2.2 de la primera parte del presente trabajo [Jactthar Escamilla(2024)]. Para el subsiguiente desarrollo tomaremos el caso más usual con $\sigma = \frac{1}{2}$, obteniendo una densidad lagrangiana

$$\mathcal{L}_{BI} = \acute{o}^2 \left[1 - \sqrt{1 + 2\acute{o}^{-2}\mathscr{G} - \acute{o}^{-4}\mathscr{P}^2}\right] = \xi^2 \left(1 - \sqrt{1 + 2\xi^{-2}\mathscr{G} - \xi^{-2}\zeta^{-2}\mathscr{P}^2}\right), \tag{2.1}$$

siendo $\zeta^2 = \left(\frac{1}{\acute{o}} + \gamma\right)^{-1}$ el segundo parámetro de relación entre las teorías y $\acute{o}$ el parámetro de no linealidad característico de la teoría BI. En consecuencia, al calcular las derivadas usando la primera definición, obtenemos

$$\mathcal{L}^{BI}_{\mathscr{G}} = -(1 + 2\acute{o}^{-2}\mathscr{G} - \acute{o}^{-4}\mathscr{P}^2)^{-\frac{1}{2}}, \tag{2.2a}$$

$$\mathcal{L}^{BI}_{\mathscr{G}\mathscr{G}} = \acute{o}^{-2}(1 + 2\acute{o}^{-2}\mathscr{G} - \acute{o}^{-4}\mathscr{P}^2)^{-\frac{3}{2}}, \tag{2.2b}$$

$$\mathcal{L}^{BI}_{\mathscr{P}} = \acute{o}^{-2}\mathscr{P}(1 + 2\acute{o}^{-2}\mathscr{G} - \acute{o}^{-4}\mathscr{P}^2)^{-\frac{1}{2}},$$

$$\mathcal{L}^{BI}_{\mathscr{P}\mathscr{P}} = \acute{o}^{-2}(1 + 2\acute{o}^{-2}\mathscr{G} - \acute{o}^{-4}\mathscr{P}^2)^{-\frac{1}{2}} + \acute{o}^{-6}\mathscr{P}^2(1 - 2\acute{o}^{-2}\mathscr{G} - \acute{o}^{-4}\mathscr{P})^{-\frac{3}{2}},$$

$$\mathcal{L}^{BI}_{\mathscr{G}\mathscr{P}} = -\acute{o}^{-4}\mathscr{P}(1 + 2\acute{o}^{-2}\mathscr{G} - \acute{o}^{-4}\mathscr{P}^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

Como se puede distinguir, el cálculo consecuente se complicaría demasiado en términos de las ecuaciones anteriores, sin embargo, es posible simplificar las expresiones para las derivadas respecto al invariante $\mathscr{P}$ y así obtener resultados más comprensibles; por ello las tomamos como funciones de las parciales (2.2) resultando en

$$\mathcal{L}^{BI}_{\mathscr{P}} = -\acute{o}^{-2}\mathscr{P}\mathcal{L}^{BI}_{\mathscr{G}}, \tag{2.3a}$$

$$\mathcal{L}^{BI}_{\mathscr{P}\mathscr{P}} = -\acute{o}^{-2}\mathcal{L}^{BI}_{\mathscr{G}} + \acute{o}^{-4}\mathscr{P}^2\mathcal{L}^{BI}_{\mathscr{G}\mathscr{G}}, \tag{2.3b}$$

$$\mathcal{L}^{BI}_{\mathscr{G}\mathscr{P}} = -\acute{o}^{-2}\mathscr{P}\mathcal{L}^{BI}_{\mathscr{G}\mathscr{G}}. \tag{2.3c}$$

Calculando los coeficientes consecuentes de la relación algebraica, establecidos en (1.7), los simplificamos como

$$\Omega_1 = \frac{\mathcal{L}^{BI}_{\mathcal{GG}}}{\mathcal{O}^2}\left[\mathcal{P} - \frac{2\mathcal{G}\,\mathcal{P}}{\mathcal{L}^{BI}_{\mathcal{G}}}\left(\frac{\mathcal{P}^2\mathcal{L}^{BI}_{\mathcal{GG}}}{\mathcal{O}^4} - \frac{\mathcal{L}^{BI}_{\mathcal{G}}}{\mathcal{O}^2}\right)\right] + \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{L}^{BI}_{\mathcal{G}}}\left[\left(\frac{\mathcal{P}^2\mathcal{L}^{BI}_{\mathcal{GG}}}{\mathcal{O}^4} - \frac{\mathcal{L}^{BI}_{\mathcal{G}}}{\mathcal{O}^2}\right)^2 - \frac{\mathcal{P}^2{\mathcal{L}^{BI}_{\mathcal{GG}}}^2}{\mathcal{O}^4}\right], \tag{2.4a}$$

$$\Omega_2 = \mathcal{L}^{BI}_{\mathcal{GG}}\left(\frac{\mathcal{P}^2}{\mathcal{O}^4} - 1\right) - \frac{\mathcal{L}^{BI}_{\mathcal{G}}}{\mathcal{O}^2} + \frac{2\mathcal{G}}{\mathcal{L}^{BI}_{\mathcal{G}}}\left[\frac{\mathcal{P}^2{\mathcal{L}^{BI}_{\mathcal{GG}}}^2}{\mathcal{O}^4} + \mathcal{L}^{BI}_{\mathcal{GG}}\left(\frac{\mathcal{P}^2\mathcal{L}^{BI}_{\mathcal{GG}}}{\mathcal{O}^4} - \frac{\mathcal{L}^{BI}_{\mathcal{G}}}{\mathcal{O}^2}\right)\right] + \cdots$$
$$+ \frac{2\mathcal{P}}{\mathcal{L}^{BI}_{\mathcal{G}}}\left[\frac{\mathcal{P}{\mathcal{L}^{BI}_{\mathcal{GG}}}^2}{\mathcal{O}^2} - \frac{\mathcal{P}\mathcal{L}^{BI}_{\mathcal{GG}}}{\mathcal{O}^2}\left(\frac{\mathcal{P}^2\mathcal{L}^{BI}_{\mathcal{GG}}}{\mathcal{O}^4} - \frac{\mathcal{L}^{BI}_{\mathcal{G}}}{\mathcal{O}^2}\right)\right], \tag{2.4b}$$

$$\Omega_3 = -\frac{\mathcal{P}\mathcal{L}^{BI}_{\mathcal{GG}}}{\mathcal{O}^2} + \frac{\mathcal{P}{\mathcal{L}^{BI}_{\mathcal{GG}}}^2}{\mathcal{L}^{BI}_{\mathcal{G}}}\left(\frac{\mathcal{P}^2}{\mathcal{O}^4} - \frac{2\mathcal{G}}{\mathcal{O}^2} - 1\right). \tag{2.4c}$$

De tal manera que los coeficientes definidos por la ecuación (1.8) corresponden al siguiente resultado

$$\Omega_\pm = \frac{\mathcal{O}^4\mathcal{L}^{BI}_{\mathcal{G}} - 2\mathcal{O}^2\mathcal{P}^2\mathcal{L}^{BI}_{\mathcal{GG}} \pm \mathcal{O}^4\mathcal{L}^{BI}_{\mathcal{G}}}{2\mathcal{P}^3\mathcal{L}^{BI}_{\mathcal{GG}} - 2\mathcal{O}^2\mathcal{P}\mathcal{L}^{BI}_{\mathcal{G}}}. \tag{2.5}$$

Entonces, usando la definición de los coeficientes de reflexión dada por (1.9), esto se encuentran determinados para el caso Born-Infeld como

$$\lambda_\pm \equiv -\frac{4\left[\mathcal{L}^{BI}_{\mathcal{GG}} - \frac{\mathcal{P}\mathcal{L}^{BI}_{\mathcal{GG}}(\mathcal{O}^4\mathcal{L}^{BI}_{\mathcal{G}} - [2\mathcal{O}^2\mathcal{P}^2\mathcal{L}^{BI}_{\mathcal{GG}} \pm \mathcal{O}^4\mathcal{L}^{BI}_{\mathcal{G}}])}{\mathcal{O}^2(2\mathcal{O}^2\mathcal{L}^{BI}_{\mathcal{G}} - 2\mathcal{P}^3\mathcal{L}^{BI}_{\mathcal{GG}})}\right]}{\mathcal{L}^{BI}_{\mathcal{G}} - \mathcal{P}\left[\frac{\mathcal{P}\mathcal{L}^{BI}_{\mathcal{GG}}}{\mathcal{O}^2} - \left(\frac{\mathcal{P}^2\mathcal{L}^{BI}_{\mathcal{GG}}}{\mathcal{O}^4} - \frac{\mathcal{L}^{BI}_{\mathcal{G}}}{\mathcal{O}^2}\right)\left(\frac{\mathcal{O}^4\mathcal{L}^{BI}_{\mathcal{G}} - [2\mathcal{O}^2\mathcal{P}^2\mathcal{L}^{BI}_{\mathcal{GG}} \pm \mathcal{O}^4\mathcal{L}^{BI}_{\mathcal{G}}]}{2\mathcal{O}^2\mathcal{L}^{BI}_{\mathcal{G}} - 2\mathcal{P}^3\mathcal{L}^{BI}_{\mathcal{GG}}}\right)\right]}\mathcal{F}^{\vartheta\mu}\mathcal{F}^{\nu}_{\vartheta}k_\mu k_\nu,$$

para tener una forma más sencilla recurrimos a Mathematica, de forma que se obtiene la igualdad

$$\lambda_\pm = -\frac{4\mathcal{O}^2\mathcal{L}^{BI}_{\mathcal{GG}}}{\mathcal{O}^2\mathcal{L}^{BI}_{\mathcal{G}} - \mathcal{P}^2\mathcal{L}^{BI}_{\mathcal{GG}}}\mathcal{F}^{\vartheta\mu}\mathcal{F}^{\nu}_{\vartheta}k_\mu k_\nu, \tag{2.6}$$

de esta manera se denota que en la teoría BI no se presenta el fenómeno de birrefringencia. Por ello, al imponer la condición para la estrella de neutrones $B \gg E$ como en el caso Heisenberg-Euler y usando las definiciones para las parciales (2.2) la aproximación final para

los coeficientes $\lambda_{\pm}$ es

$$\lambda_{\pm} \approxeq \frac{4}{B^2 + \acute{o}^2} \mathcal{F}^{\vartheta\mu} \mathcal{F}^{\nu}_{\vartheta} k_{\mu} k_{\nu}. \tag{2.7}$$

Por lo tanto, la métrica efectiva queda determinada de acuerdo con la siguiente expresión

$$\mathcal{g}^{\mu\nu}_{\text{ef}\pm} \approxeq \mathcal{g}^{\mu\nu} + \frac{4}{B^2 + \acute{o}^2} t^{\mu\nu}. \tag{2.8}$$

Como se puede determinar, en el límite $\acute{o} \to \infty$ donde se recupera el comportamiento de las ecuaciones de Maxwell, la contribución de no linealidad se desprecia y recuperamos $\mathcal{g}^{\mu\nu}_{\text{ef}\pm} = \mathcal{g}^{\mu\nu}$.

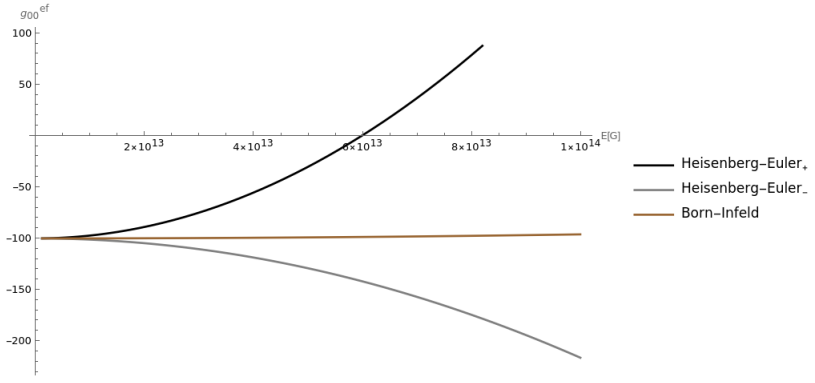
2.2 Efectos Gravitacionales

Corrimiento al Rojo

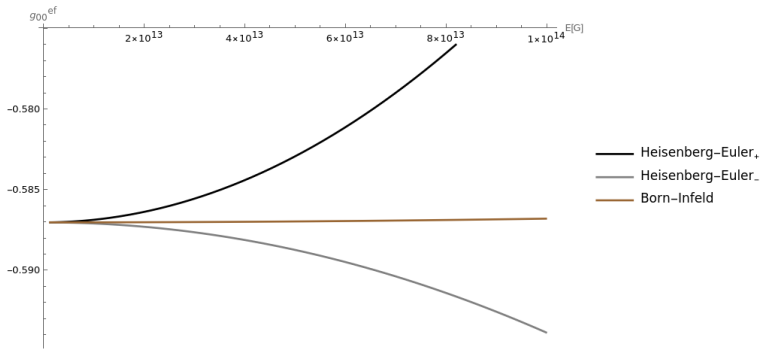
Tomando como punto de partida la ecuación (1.23) y (1.24), las componentes temporales de la métrica efectiva de la teoría Born-Infeld serían respectivamente

$$\mathcal{g}^{\text{ef}-TOV}_{00} = -e^{\nu(r)} + e^{2\nu(r)} \frac{4E^2}{B^2 + \acute{o}^2}, \tag{2.9a}$$

$$\mathcal{g}^{\text{ef}-Sch}_{00} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2 \left(\frac{4E^2}{B^2 + \acute{o}^2}\right). \tag{2.9b}$$



(a) Comparación entre las métricas efectivas como función del campo eléctrico para la solución TOV referente a las teorías HE y BI, denotando una mayor regulación por parte de esta última.



(b) Métricas efectivas obtenidas para la superficie de las estrellas de neutrones. De igual forma que en el caso TOV, la solución relacionada con la métrica de Schwarzschild crece más lentamente para la teoría Born-Infeld.

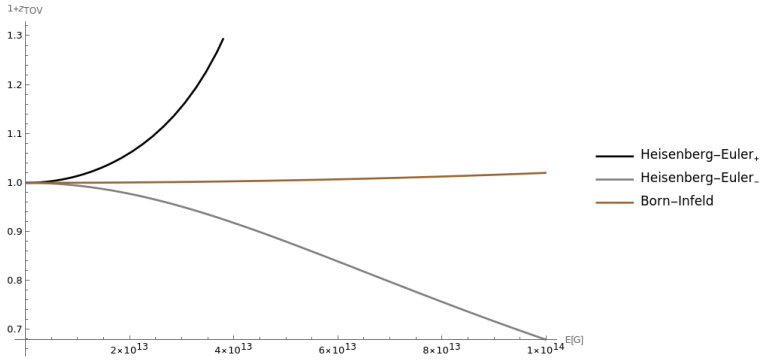
Figura 2.1: Comparación de las métricas efectivas en las soluciones TOV y Schwarzschild. Podemos concluir que los efectos de regulación, dados por el parámetro de no linealidad $б$ de la teoría BI, son más significativos que los de la teoría HE.

Entonces, de acuerdo con (1.20), se obtiene que la ecuación de corrimiento al rojo con efectos internos es:

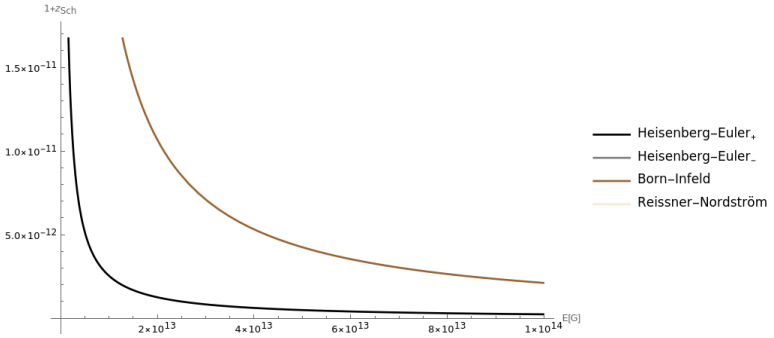
$$1 + z_{TOV} = \sqrt{\frac{B^2 + б^2}{B^2 + б^2 - 4E^2 e^{\nu(r)}}}, \tag{2.10}$$

mientras que la ecuación de corrimiento al rojo detectable como emitida desde la superficie de la estrella de neutrones es:

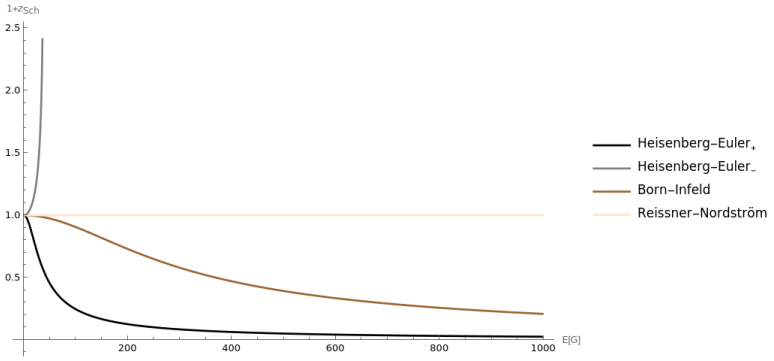
$$1 + z_{Sch} = \sqrt{\frac{B^2 + б^2}{B^2 + б^2 - 4E^2\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}}. \tag{2.11}$$



(a) De igual manera que con los efectos en la métrica, para el corrimiento al rojo, los efectos internos presentan un crecimiento más lento con la teoría Born-Infeld.



(b) Cuando se consideran los valores de un campo eléctrico entre $10^{12} - 10^{14}$ G, el corrimiento al rojo presenta efectos pequeños, además solo se consideran correcciones por parte de una de las soluciones de la teoría Heisenberg-Euler y la teoría Born-Infeld.



(c) Se debe tomar en cuenta un campo eléctrico muy pequeño para poder ver de manera precisa la comparación con la otra solución de la teoría HE y además la comparación con el efecto de la métrica de Reissner-Nordström.

Figura 2.2: Las gráficas muestran el comportamiento del corrimiento al rojo y la comparación entre los efectos de las métricas efectivas para la parte interna con 2.2a, mientras que la superficie de la estrella de neutrones se denotan en 2.2b.

Precesión de Lense-Thirring

Haciendo uso de la ecuación (1.31) y considerando que para la teoría Born-Infeld

$$\psi^{\mathrm{BI}} = -\frac{4}{B^2 + \mathcal{E}^2} \tag{2.12}$$

entonces las soluciones para la precesión de Lense-Thirring son simplemente

$$\Omega^{\rm BI} = \frac{1}{r} + r\sin^2\theta(B_x^2 + B_y^2 - E_z^2)\left(\frac{4}{B^2+6^2}\right)$$
$$- 2r^2\sin^2\theta[(B_yB_z + E_yE_z)^2 + \sin^2\theta(B_x^2 + B_y^2 - E_z^2)^2]\left(\frac{4}{B^2+6^2}\right)^2$$
$$+ \left(\frac{r^2\cos\theta\sin\theta(B_xB_z + E_xE_z)}{2\left(1-\frac{2M}{r}\right)^2}\right)\left(1-\frac{2M}{r}\right)^3(B_yE_x - B_xE_y)\left(\frac{4}{B^2+6^2}\right)^2$$
$$- \left(\frac{r\sin^2\theta(B_xB_z + E_xE_z)}{2\left(1-\frac{2M}{r}\right)^2}\right)\left(1-\frac{3M}{r}\right)(E_xE_z + B_xB_z)\left(\frac{4}{B^2+6^2}\right)^2. \quad (2.13)$$

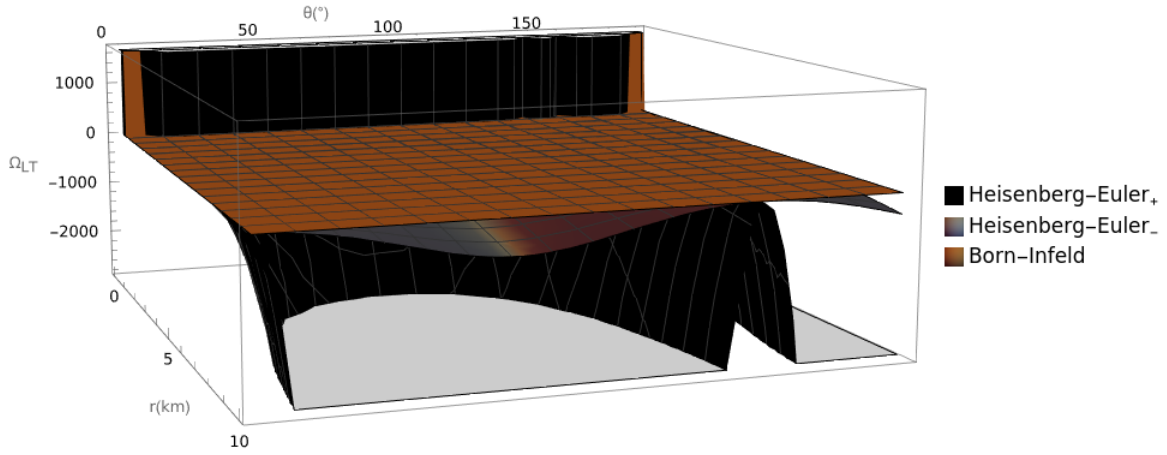


Figura 2.3: La gráfica muestra el comportamiento de las diferentes soluciones para Heisenberg-Euler y la solución de Born-Infeld en la precesión LT. Se observa que la solución de BI es más estable,mientras que las soluciones de HE presentan mayores correcciones asociadas a la métrica efectiva de esta teoría.

3 TEORÍA MODMAX EN ESTRELLAS DE NEUTRONES

Durante este capítulo se estudiará la teoría ModMax, la cual introduce correcciones a la teoría de Maxwell, modificando la propagación de la luz y el comportamiento del espacio-tiempo en entornos extremos. Inicialmente, se describirá su formalismo matemático y las características que la relacionan con soluciones de tipo agujero negro, para después analizar su aplicación específica en estrellas de neutrones. Posteriormente, se llevará a cabo el mismo tipo de análisis que se realizó con las teorías de Heisenberg-Euler y Born-Infeld.

3.1 Descripción de la Teoría ModMax

De acuerdo con el artículo [Bandos *et al.*(2020)Bandos, Lechner, Sorokin, and Townsend], a partir de las ecuaciones de Maxwell se obtienen las relaciones constitutivas $\vec{E} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{D}}$ y $\vec{H} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{B}}$; además, por condición de invariancia es posible obtener los dos invariantes duales correspondientes a

$$g = \frac{|\vec{D}|^2 + |\vec{B}|^2}{2}, \tag{3.1a}$$

$$p = |\vec{D} \times \vec{B}|. \tag{3.1b}$$

Como consecuencia, la invariancia conforme se denota a partir de $\vec{D} \cdot \vec{E} + \vec{B} \cdot \vec{H} = 2\mathcal{H}$

y, al hacer la transformación de Legendre respecto a $\vec{D}$, la densidad hamiltoniana para el límite del campo débil se puede escribir como

$$\mathcal{H} = g\cosh(\chi) - \sqrt{g^2+p^2}\sinh(\chi). \tag{3.2}$$

Así, para despreciar los efectos de la transformada de Legendre se toma la desigualdad $s^2 - p^2 = \xi^2 + \eta^2 \geq 0$ de manera que obtenemos $\mathcal{H} = g\cosh(\chi) - \xi\sinh(\chi)\sec(\Theta)$ lo que finalmente conlleva a la densidad lagrangiana que, de acuerdo a la ecuación (3.1b), implica $\mathcal{L} = \vec{E}\cdot\vec{D} - \mathcal{H}$. Por lo tanto, los invariantes escalares y la densidad lagrangiana son

$$\mathscr{G} = [\cosh(\chi) - \sinh(\chi)\sec(\Theta)]\,\mathcal{L}, \tag{3.3a}$$

$$\mathscr{P} = \tan(\Theta)\mathcal{L}, \tag{3.3b}$$

$$\mathcal{L}_{MM} \equiv -\mathscr{G}\cosh\chi + \sqrt{\mathscr{G}^2+\mathscr{P}^2}\sinh\chi. \tag{3.4}$$

Entonces, las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes son

$$\left[\left(\cosh\chi - \frac{\mathscr{G}}{\sqrt{\mathscr{G}^2+\mathscr{P}^2}}\sinh\chi\right)\mathcal{F}^{\mu\nu} - \frac{\mathscr{P}}{\sqrt{\mathscr{G}^2+\mathscr{P}^2}}\sinh\chi\overset{*}{F}^{\mu\nu}\right]_{,\mu} = 0. \tag{3.5}$$

Por las definiciones $\vec{D} \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vec{E}}$ y $\vec{H} \equiv -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vec{B}}$, obtenemos un desplazamiento eléctrico dado por $\vec{D} = \left(\cosh\chi - \frac{\mathscr{G}}{\sqrt{\mathscr{G}^2+\mathscr{P}^2}}\sinh\chi\right)\vec{E} + \left(\frac{\mathscr{P}}{\sqrt{\mathscr{G}^2+\mathscr{P}^2}}\sinh\chi\right)\vec{B}$ y a sí mismo un campo magnético con $\vec{H} = \left(\cosh\chi - \frac{\mathscr{G}}{\sqrt{\mathscr{G}^2+\mathscr{P}^2}}\sinh\chi\right)\vec{B} - \left(\frac{\mathscr{P}}{\sqrt{\mathscr{G}^2+\mathscr{P}^2}}\sinh\chi\right)\vec{E}$; el producto punto resultante es

$$\begin{aligned}\vec{E}\cdot\vec{B} \neq \vec{D}\cdot\vec{H} = \Bigg[&\left(\cosh\chi - \frac{\mathscr{G}}{\sqrt{\mathscr{G}^2+\mathscr{P}^2}}\sinh\chi\right)^2 - \frac{\mathscr{P}^2\sinh^2\chi}{\mathscr{G}^2+\mathscr{P}^2} + \cdots \\ &+ 2\left(\cosh\chi - \frac{\mathscr{G}}{\sqrt{\mathscr{G}^2+\mathscr{P}^2}}\sinh\chi\right)\left(\frac{\mathscr{G}\sinh\chi}{\sqrt{\mathscr{G}^2+\mathscr{P}^2}}\right)\Bigg]\vec{E}\cdot\vec{B}.\end{aligned} \tag{3.6}$$

Es decir, la simetría dual no se cumple salvo que se cumplan condiciones concretas para la teoría ModMax.

Para resaltar las correcciones del comportamiento no lineal tomaremos en cuenta un objeto de tipo carga puntual, con campo magnético nulo, caracterizado por la ecuación $\nabla \cdot \vec{D} = 4\pi Q\delta(\vec{r})$ con solución establecida de acuerdo con la definición del desplazamiento eléctrico, es decir, $D = E(\cosh\chi + \sinh\chi) = \frac{Q}{r^2}$; por lo tanto se obtiene un campo eléctrico

$$E = \frac{Q}{r^2}\exp(-\chi). \tag{3.7}$$

Como se puede observar, recuperamos la electrodinámica de Maxwell cuando sometemos la teoría al límite $\chi \to 0$.

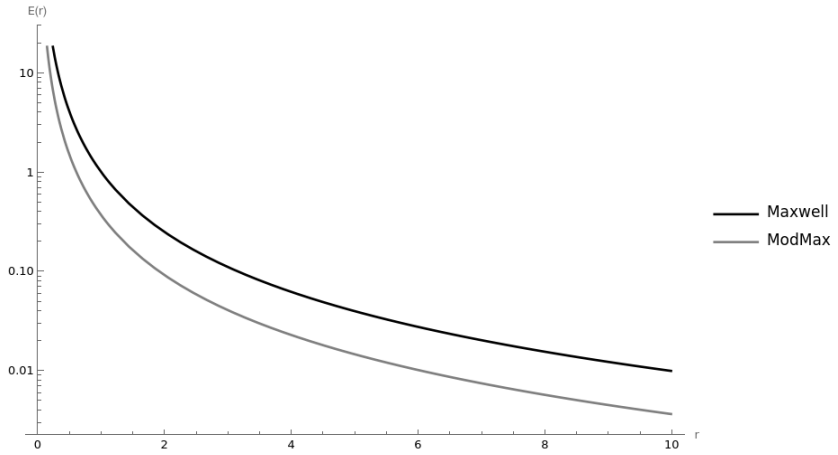


Figura 3.1: La gráfica muestra el comportamiento del campo eléctrico para las teorías de Maxwell y ModMax. En este caso la corrección no lineal se presenta como una modificación exponencial que hace decrecer de manera general la magnitud del campo, sin alterar la estructura funcional de la teoría clásica, se utilizo $\chi = 0.1$.

Solución de Tipo Agujero Negro

Generalizando el caso ModMax se considera una densidad lagrangiana de tipo

$$\mathcal{L}_{GMM} = \xi^2\left[1 - \left(1 + \frac{\mathscr{G}\cosh\chi - \sqrt{\mathscr{G}^2 + \mathscr{P}^2}\sinh\chi}{\xi^2\sigma} - \frac{\mathscr{P}^2}{2\xi^2\zeta^2\sigma}\right)^{\sigma}\right], \tag{3.8}$$

donde ξ y ζ son los parámetros de no linealidad de la teoría Born-Infeld generalizada y σ es el parámetro de generalización; además, de acuerdo con [Kruglov(2017)], a partir de los

resultados de [Shabad and Usov(2011)] para una lagrangiana efectiva, una teoría no lineal debe cumplir con las desigualdades $\mathcal{L}_{\mathscr{G}} \leq 0$, $\mathcal{L}_{\mathscr{G}\mathscr{G}} \geq 0$, $\mathcal{L}_{\mathscr{G}} + 2\mathscr{G}\mathcal{L}_{\mathscr{G}\mathscr{G}} \leq 0$ y $\mathcal{L}_{\mathscr{P}\mathscr{P}} \geq 0$. Entonces, usando $\Xi = 1 + \frac{\mathscr{G}\cosh\chi - \sqrt{\mathscr{G}^2+\mathscr{P}^2}\sinh\chi}{\xi^2\sigma} - \frac{\mathscr{P}^2}{2\xi^2\zeta^2\sigma}$, las resultantes de la *generalización ModMax* (3.8) son

$$\mathcal{L}_{\mathscr{G}} = -\left(\cosh\chi + \frac{\mathscr{G}}{\sqrt{\mathscr{G}^2+\mathscr{P}^2}}\sinh\chi\right)\Xi^{\sigma-1}, \tag{3.9a}$$

$$\mathcal{L}_{\mathscr{G}\mathscr{G}} = \frac{1-\sigma}{\xi^2\sigma}\left(\cosh\chi + \frac{\mathscr{G}}{\sqrt{\mathscr{G}^2+\mathscr{P}^2}\sinh\chi}\right)^2\Xi^{\sigma-2} - \sinh\chi\left(\frac{\sqrt{\mathscr{G}^2+\mathscr{P}^2}+\mathscr{G}^2[\mathscr{G}^2+\mathscr{P}^2]^{-\frac{1}{2}}}{\mathscr{G}^2+\mathscr{P}^2}\right)\Xi^{\sigma-1}, \tag{3.9b}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathscr{G}} + 2\mathscr{G}\mathcal{L}_{\mathscr{G}\mathscr{G}} = \frac{2\mathscr{G}(1-\sigma)}{\xi^2\sigma}\left(\cosh\chi + \frac{\mathscr{G}}{\sqrt{\mathscr{G}^2+\mathscr{P}^2}}\sinh\chi\right)^2\Xi^{\sigma-2} + \cdots \\ -\left(\cosh\chi + \frac{\mathscr{G}}{\sqrt{\mathscr{G}^2+\mathscr{P}^2}}\sinh\chi + 2\mathscr{G}\sinh\chi\left[\frac{\sqrt{\mathscr{G}^2+\mathscr{P}^2} - \mathscr{G}^2[\mathscr{G}^2+\mathscr{P}^2]^{-\frac{1}{2}}}{\mathscr{G}^2+\mathscr{P}^2}\right]\right)\Xi^{\sigma-1},\end{aligned} \tag{3.9c}$$

$$\mathcal{L}_{\mathscr{P}\mathscr{P}} = \frac{1-\sigma}{\xi^2\sigma}\left(\frac{\mathscr{P}}{\sqrt{\mathscr{G}^2+\mathscr{G}^2}\sinh\chi - \frac{\mathscr{P}}{\zeta^2}}\right)^2\Xi^{\sigma-2} + \left(\frac{\sqrt{\mathscr{G}^2+\mathscr{P}^2}-\mathscr{P}^2[\mathscr{G}^2+\mathscr{P}^2]^{-\frac{1}{2}}}{\mathscr{G}^2+\mathscr{P}^2}\sinh\chi - \zeta^{-2}\right)\Xi^{\sigma-1}. \tag{3.9d}$$

Como trataremos un agujero negro magnéticamente cargado, bajo condiciones de energía débil y campo eléctrico nulo, las desigualdades son tratadas como $\frac{B^2}{\xi^2} \leq \frac{2\sigma}{2e^{\chi}-2\sigma e^{\chi}-e^{-\chi}}$. Podemos ahora hacer uso de la acción gravedad más electrodinámica ModMax

$$\mathtt{S} = \int\sqrt{-g}\left(\frac{\mathcal{R}}{2\kappa} + \mathcal{L}_{GMM}\right)d^4x. \tag{3.10}$$

Entonces, a partir de las ecuaciones de Einstein $\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R} = -\kappa\mathcal{T}_{\mu\nu}$ donde el tensor de energía-momento corresponde a $\mathcal{T}_{\mu\nu} = -E^2\mathcal{L}_{\mathscr{G}} - \mathscr{P}\mathcal{L}_{\mathscr{P}} - \mathcal{L}_{GMM}$ y las ecuaciones de movimiento dado por el campo magnético $[\sqrt{-g}\mathcal{L}_{\mathscr{G}}\mathcal{F}^{\mu\nu}]_{,\mu} = 0$, obteniendo así el siguiente elemento de línea con simetría esférica

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2d\Omega^2 \colon d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2. \tag{3.11}$$

Por la simetría, nos centramos en el caso $[-r^2 B\left(\cosh\chi + \frac{\mathscr{G}}{\sqrt{\mathscr{G}^2+\mathscr{P}^2}}\sinh\chi\right)]_{,r} = 0$ lo que implica una densidad de energía magnética

$$\rho_B = \mathcal{T}_0^0 = \xi^2\left[\left(1+\frac{B^2 e^{-\chi}}{2\xi^2\sigma}\right)^{\sigma} - 1\right],$$

y, como el elemento de línea tiene una función de métrica efectiva $f(r) = 1 - \frac{2M(r)}{r}$, la función de masa en el límite $r \to \infty$ corresponde a

$$M(r) = m_B - \int_r^{\infty} \rho_B(r) r^r dr,$$

$$i.e. \quad M(r) = m_B - \frac{Q^2}{2r}e^{-\chi} + \frac{(1-\sigma)Q^4}{40\xi^2\sigma r^5}e^{-2\chi} - \frac{(1-\sigma)(2-\sigma)Q^6}{432\xi^4\sigma^2 r^9}e^{-3\chi} + \mathcal{O}(r^{-13}). \quad (3.12)$$

Por lo tanto, la función de métrica efectiva para el agujero negro es

$$f(r) = 1 - \frac{2m_B}{r} + \frac{Q^2}{r^2}e^{-\chi} - \frac{(1-\sigma)Q^4}{20\xi^2\sigma r^6}e^{-2\chi} + \frac{(1-\sigma)(2-\sigma)Q^6}{216\xi^4\sigma^2 r^{10}}e^{-3\chi} + \mathcal{O}(r^{-14}). \quad (3.13)$$

Como los límites de la teoría ModMax son $\sigma \to 1$ y $\chi \to 0$, al emplearlos en la ecuación anterior recuperamos la métrica de Reissner-Nordström.

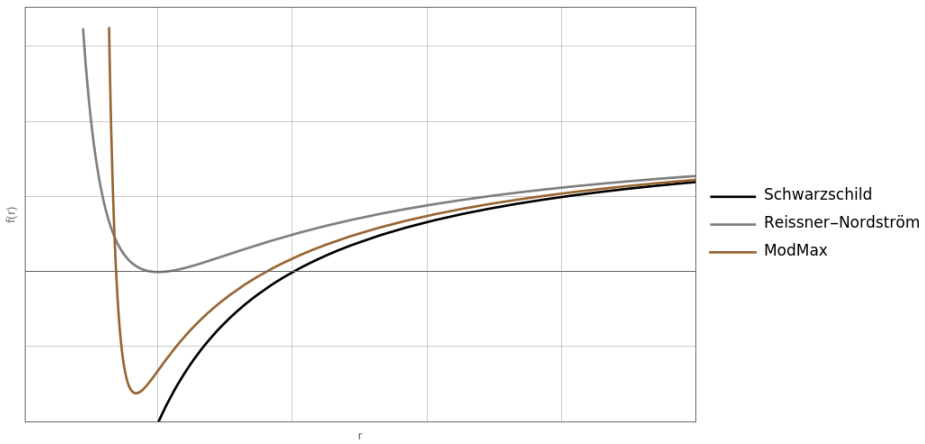


Figura 3.2: Las correcciones para la teoría ModMax implican reducción al campo de forma general como en el caso de la carga puntual sin alterar su comportamiento en límite con $r \to 0$ y con similitudes en el límite de campo débil. La proporción para los límites son $\chi = 1$, $\sigma = 0.1$ y $\xi = 1$.

3.2 Métrica Efectiva y Métrica Geométrica en ModMax

Para llevar a cabo el análisis respectivo a estrellas de neutrones consideramos el caso más utilizado con la densidad lagrangiana (3.4), así pues, tomando las derivadas respecto a los invariantes obtenemos

$$\mathcal{L}^{MM}_{\mathscr{G}} = -\cosh\chi + \frac{\mathscr{G}}{\sqrt{\mathscr{G}^2+\mathscr{P}^2}}\sinh\chi, \tag{3.14a}$$

$$\mathcal{L}^{MM}_{\mathscr{P}} = \frac{\mathscr{P}}{\sqrt{\mathscr{G}^2+\mathscr{P}^2}}\sinh\chi, \tag{3.14b}$$

$$\mathcal{L}^{MM}_{\mathscr{G}\mathscr{G}} = \mathscr{P}^2\left[\mathscr{G}^2+\mathscr{P}^2\right]^{-\frac{3}{2}}\sinh\chi, \tag{3.14c}$$

$$\mathcal{L}^{MM}_{\mathscr{P}\mathscr{P}} = \mathscr{G}^2\left[\mathscr{G}^2+\mathscr{P}^2\right]^{-\frac{3}{2}}\sinh\chi, \tag{3.14d}$$

$$\mathcal{L}^{MM}_{\mathscr{G}\mathscr{P}} = -\mathscr{G}\,\mathscr{P}[\mathscr{G}^2+\mathscr{P}^2]^{-\frac{3}{2}}\sinh\chi. \tag{3.14e}$$

Ya que la ecuación más sencilla es la primera parcial de la lagrangiana respecto al invariante $\mathscr{P}$, vale la pena reducir las expresiones en términos de esta derivada, de forma que podamos tener expresiones menos complicadas; esto conduce a

$$\mathcal{L}^{MM}_{\mathscr{G}} = -\cosh\chi + \frac{\mathscr{G}\mathcal{L}^{MM}_{\mathscr{P}}}{\mathscr{P}}, \tag{3.15a}$$

$$\mathcal{L}^{MM}_{\mathscr{G}\mathscr{G}} = \frac{\mathscr{P}\mathcal{L}^{MM}_{\mathscr{P}}}{\mathscr{G}^2+\mathscr{P}^2}, \tag{3.15b}$$

$$\mathcal{L}^{MM}_{\mathscr{P}\mathscr{P}} = \frac{\mathscr{G}^2\mathcal{L}^{MM}_{\mathscr{P}}}{\mathscr{P}(\mathscr{G}^2+\mathscr{P}^2)}, \tag{3.15c}$$

$$\mathcal{L}^{MM}_{\mathscr{G}\mathscr{P}} = \frac{-\mathscr{G}\mathcal{L}^{MM}_{\mathscr{P}}}{\mathscr{G}^2+\mathscr{P}^2}. \tag{3.15d}$$

Calculando los coeficientes de relación algebraica dados por (1.7), obtenemos los valores respectivos a la teoría ModMax

$$\Omega_1 = \frac{\mathscr{G}\mathcal{L}_{\mathscr{P}}^{MM}}{\mathscr{G}^2+\mathscr{P}^2} - \frac{\mathcal{L}_{\mathscr{P}}^{MM\,2}}{(\mathscr{G}^2+\mathscr{P}^2)^2}\left(\frac{\mathscr{G}^4}{\mathscr{P}}+\mathscr{P}\mathscr{G}^2\right)\left(\frac{\mathscr{G}\mathcal{L}_{\mathscr{P}}^{MM}}{\mathscr{P}}-\cosh\chi\right)^{-1}, \tag{3.16a}$$

$$\Omega_2 = \frac{\mathcal{L}_{\mathscr{P}}^{MM}}{\mathscr{G}^2+\mathscr{P}^2}\left(\frac{\mathscr{G}^2}{\mathscr{P}}-\mathscr{P}\right) + \frac{2\mathcal{L}_{\mathscr{P}}^{MM\,2}}{(\mathscr{G}^2+\mathscr{P}^2)^2}\left(\mathscr{G}^3+\mathscr{G}\,\mathscr{P}^2\right)\left(\frac{\mathscr{G}\mathcal{L}_{\mathscr{P}}^{MM}}{\mathscr{P}}-\cosh\chi\right)^{-1}, \tag{3.16b}$$

$$\Omega_3 = -\frac{\mathscr{G}\mathcal{L}_{\mathscr{P}}^{MM}}{\mathscr{G}^2+\mathscr{P}^2} - \frac{\mathcal{L}_{\mathscr{P}}^{MM\,2}}{(\mathscr{G}^2+\mathscr{P}^2)^2}\left(\mathscr{P}^3+\mathscr{P}\mathscr{G}^2\right)\left(\frac{\mathscr{G}\mathcal{L}_{\mathscr{P}}^{MM}}{\mathscr{P}}-\cosh\chi\right)^{-1}. \tag{3.16c}$$

Así pues, los coeficientes (1.8) correspondientes se denotan por

$$\begin{aligned}\Omega_\pm \equiv \frac{(\mathscr{G}^2+\mathscr{P}^2)\left(\mathscr{P}\cosh\chi-\mathscr{G}\mathcal{L}_{\mathscr{P}}^{MM}\right)\operatorname{sech}\chi}{2\mathscr{G}\,\mathscr{P}\mathcal{L}_{\mathscr{P}}^{MM}}\Bigg(\pm\frac{\mathcal{L}_{\mathscr{P}}^{MM}}{\mathscr{P}}+\cdots\\ +\frac{\mathcal{L}_{\mathscr{P}}^{MM}[\mathscr{G}\mathcal{L}_{\mathscr{P}}^{MM}(\mathscr{G}^2+\mathscr{P}^2)+(\mathscr{P}^3-\mathscr{P}\mathscr{G}^2)\cosh\chi]}{\mathscr{P}(\mathscr{G}^2+\mathscr{P}^2)(\mathscr{P}\cosh\chi-\mathscr{G}\mathcal{L}_{\mathscr{P}}^{MM})}\Bigg).\end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\Omega_\pm \equiv \frac{(G^2+P^2)\left(P\cosh\chi-G\mathcal{L}_P^{MM}\right)\operatorname{sech}\chi}{2GP\mathcal{L}_P^{MM}}\left(\pm\frac{\mathcal{L}_P^{MM}}{P}+\frac{\mathcal{L}_P^{MM}[G\mathcal{L}_P^{MM}(G^2+P^2)+(P^3-PG^2)\cosh\chi]}{P(G^2+P^2)(P\cosh\chi-G\mathcal{L}_P^{MM})}\right).$$

Por ello, los coeficientes de reflexión (1.9), en términos de la parcial $\mathcal{L}_{\mathscr{P}}^{MM}$ y los invariantes escalares, están dados por la igualdad

$$\lambda_\pm \equiv -\frac{\frac{4\mathscr{P}\mathcal{L}_{\mathscr{P}}^{MM}}{\mathscr{G}^2+\mathscr{P}^2}+\left(\frac{2\mathscr{G}\mathcal{L}_{\mathscr{P}}^{MM}\operatorname{sech}\chi}{\mathscr{P}}-2\right)\left(\frac{\mathcal{L}_{\mathscr{P}}^{MM}[\mathscr{G}\mathcal{L}_{\mathscr{P}}^{MM}(\mathscr{G}^2+\mathscr{P}^2)+(\mathscr{P}^3-\mathscr{P}\mathscr{G}^2)\cosh\chi]}{\mathscr{P}(\mathscr{G}^2+\mathscr{P}^2)(\mathscr{P}\cosh\chi-\mathscr{G}\mathcal{L}_{\mathscr{P}}^{MM})}\pm\frac{\mathcal{L}_{\mathscr{P}}^{MM}}{\mathscr{P}}\right)\mathcal{F}^{\vartheta\mu}\mathcal{F}_\vartheta^\nu k_\mu k_\nu}{\frac{\mathscr{G}^3\mathcal{L}_{\mathscr{P}}^{MM}}{\mathscr{P}^3+\mathscr{P}\mathscr{G}^2}-\cosh\chi+\frac{\mathscr{G}\operatorname{sech}\chi}{2\mathscr{P}}(\mathscr{P}\cosh\chi-\mathscr{G}\mathcal{L}_{\mathscr{P}}^{MM})\left(\frac{\mathcal{L}_{\mathscr{P}}^{MM}[\mathscr{G}\mathcal{L}_{\mathscr{P}}^{MM}(\mathscr{G}^2+\mathscr{P}^2)+(\mathscr{P}^3-\mathscr{P}\mathscr{G}^2)\cosh\chi]}{\mathscr{P}(\mathscr{G}^2+\mathscr{P}^2)(\mathscr{P}\cosh\chi-\mathscr{G}\mathcal{L}_{\mathscr{P}}^{MM})}\pm\frac{\mathcal{L}_{\mathscr{P}}^{MM}}{\mathscr{P}}\right)}, \tag{3.18}$$

Entonces, al usar la desigualdad de los campos para estrellas de neutrones con $B \gg E$ resultando en $\mathscr{G} \approxeq \frac{B^2}{2}$ y $\mathscr{P} = EB$, podemos sustituir los invariantes de forma que se obtiene la aproximación

$$\begin{aligned}\lambda_\pm \approxeq \frac{\sinh\chi}{(B^4+4E^2B^2)^{\frac{3}{2}}}\Big(32E^2B^2+\varsigma_\pm[2B^4+8E^2B^2][B^2\operatorname{sech}\chi-\sqrt{B^4+4E^2B^2}\cosh\chi]\Big)\\ \left(\frac{B^6\sinh\chi}{(B^4+4E^2B^2)^{\frac{3}{2}}}-\cosh\chi+\varsigma_\pm\left[\frac{B^2}{4}-\frac{B^4\tanh\chi}{4\sqrt{B^4+4E^2B^2}}\right]\right),\end{aligned}$$

donde $\varsigma_{\pm} \equiv \left[\frac{2\sinh\chi([B^6+4E^2B^4]\sinh\chi+[4E^2B^2-B^4]\sqrt{B^4+4E^2B^2}\cosh\chi)}{(B^4+4E^2B^2)^{\frac{3}{2}}(\sqrt{B^4+4E^2B^2}\cosh\chi-B^2\sinh\chi)} \pm \sqrt{\frac{4\sinh^4\chi}{B^4+4E^2B^2}}\right]$. Volviendo a hacer uso de la desigualdad entre los campos, de forma que se pueden despreciar contribuciones del campo eléctrico, los coeficientes de reflexión corresponden a

$$\lambda_{\pm} \cong -\frac{4\sinh\chi(\operatorname{sech}\chi-\operatorname{csch}\chi)(-\sinh\chi\pm\sinh\chi)}{B^2[\sinh\chi-\cosh\chi+\frac{1}{2}(1-\tanh\chi)(-\sinh\chi\pm\sinh\chi)]}\mathcal{F}^{\vartheta\mu}\mathcal{F}^{\nu}_{\vartheta}k_{\mu}k_{\nu},$$

$$\therefore \lambda_{\pm} \cong \frac{8(\sinh\chi\mp\sinh\chi)}{B^2(2\cosh\chi+\sinh\chi\mp\sinh\chi)}\mathcal{F}^{\vartheta\mu}\mathcal{F}^{\nu}_{\vartheta}k_{\mu}k_{\nu}. \tag{3.19}$$

Ergo, la métrica efectiva para el caso de la teoría ModMax definida por (1.1) está dada por

$$\mathcal{g}^{\mu\nu}_{\text{ef}} \cong g^{\mu\nu} + \frac{8(\sinh\chi\mp\sinh\chi)}{B^2(2\cosh\chi+\sinh\chi\mp\sinh\chi)}t^{\mu\nu}, \tag{3.20}$$

Como se puede observar, si se toma el límite de la teoría ModMax con $\chi \to 0$, obtendríamos de nueva cuenta la teoría de Maxwell recuperando así $\mathcal{g}^{\mu\nu}_{\text{ef}} = g^{\mu\nu}$.

3.3 Efectos Gravitacionales

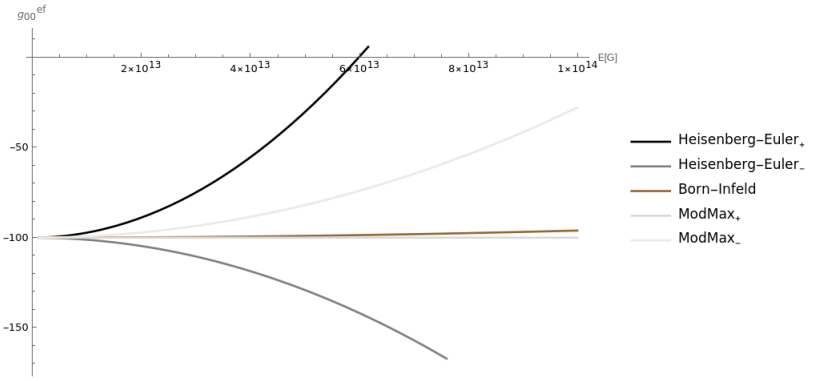
Durante esta sección se mostrarán las ecuaciones para corrimiento al rojo, tanto de efectos internos como externos, así como la de precesión de Lense-Thirring en el caso de la teoría ModMax. Además se comparará gráficamente su comportamiento con los resultados obtenidos en las teorías anteriores, todas en función del campo eléctrico.

Corrimiento al Rojo

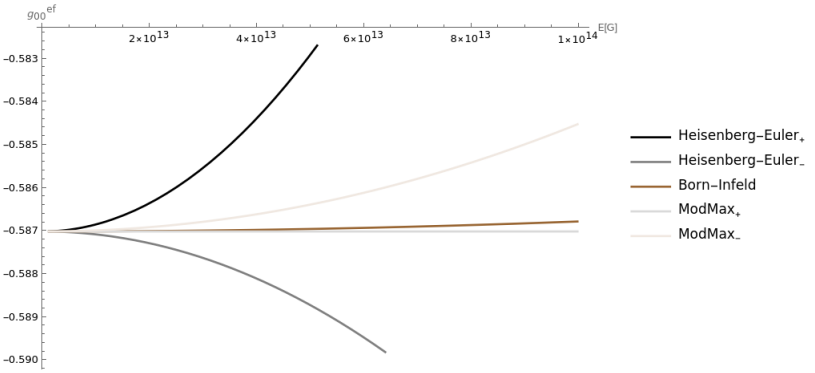
De acuerdo con las ecuaciones (1.23) y (1.24), las componentes temporales de la métrica efectiva para la teoría ModMax son

$$\mathcal{g}^{\text{ef}-TOV}_{00} = -e^{\nu(r)} + e^{2\nu(r)}\frac{8E^2(\sinh\chi\mp\sinh\chi)}{B^2(2\cosh\chi+\sinh\chi\mp\sinh\chi)}, \tag{3.21a}$$

$$\mathcal{g}_{00}^{\text{ef}-Sch} = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)+\left(1-\frac{2M}{r}\right)^2\left(\frac{8E^2(\sinh\chi\mp\sinh\chi)}{B^2(2\cosh\chi+\sinh\chi\mp\sinh\chi)}\right). \tag{3.21b}$$



(a) Al comparar las componentes temporales de las métricas efectivas obtenidas a lo largo del proyecto se destaca que una solución del caso ModMax se visualiza constante, mientras que la segunda solución tiene un comportamiento del tipo de BI y HE_+.



(b) Para el caso externo, con métrica de Schwarzschild, obtenemos el mismo tipo de comportamiento que en el caso TOV con un valor constante y otro del tipo BI y HE_+.

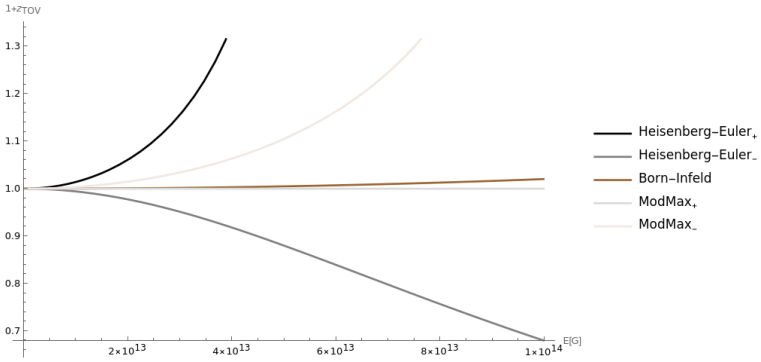
Figura 3.3: Se tomo un valor $\chi = 0.1$, de forma que fuera una corrección pequeña, entonces una de las soluciones recupera el comportamiento clásico mientras que la segunda presenta las correcciones de la NLED.

De acuerdo con la ecuación de corrimiento al rojo (1.20), los efectos internos implican

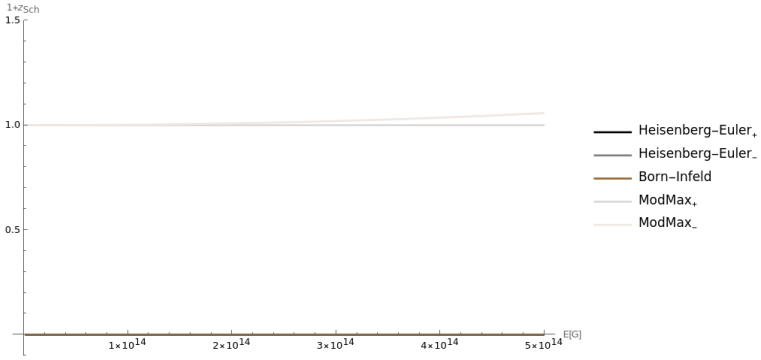
$$1+z_{TOV} = \sqrt{\frac{B^2(2\cosh\chi+\sinh\chi\mp\sinh\chi)}{B^2(2\cosh\chi+\sinh\chi\mp\sinh\chi)-8e^{\nu(r)}E^2(\sinh\chi\mp\sinh\chi)}}. \tag{3.22}$$

Por su parte las condiciones de la superficie de la estrella de neutrones implican

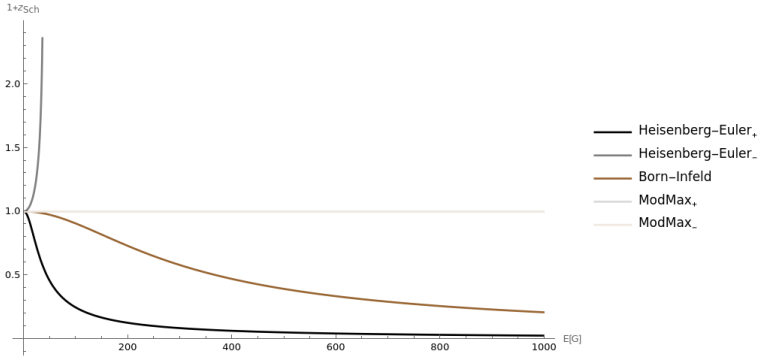
$$1+z_{Sch} = \sqrt{\frac{B^2(2\cosh\chi+\sinh\chi\mp\sinh\chi)}{B^2(2\cosh\chi+\sinh\chi\mp\sinh\chi)-8E^2(\sinh\chi\mp\sinh\chi)\left(1-\frac{2M}{r}\right)}}. \tag{3.23}$$



(a) De igual forma que en las gráficas de la parte temporal de la métrica efectiva, se puede distinguir como se recupera una solución clásica para la teoría ModMax, mientras que la otra implica las correcciones no lineales de la teoría.



(b) Considerando los valores para el campo eléctrico en el rango $10^{12} - 10^{14}$G, es posible distinguir de manera adecuada las soluciones de ModMax, pero en comparación, las demás soluciones son apenas distinguibles en la gráfica.



(c) Para la proporción de valores pequeños del campo eléctrico se obtiene una imagen donde no es posible distinguir las diferencias entre las dos soluciones a la métrica de la teoría ModMax.

Figura 3.4: Las gráficas de corrimiento al rojo para condiciones internas 3.4a implica un modelo más adecuado para la comparación entre las teorías, mientras que para el caso externo en 3.4b la teoría ModMax se ajusta mejor al comportamiento clásico que las otras dos teorías.

Precesión de Lense-Thirring

Al utilizar la ecuación (1.31) y la definición para ModMax del parámetro $\psi_{\pm}$

$$\psi_{\pm}^{\mathrm{MM}} = -\frac{8(\sinh\chi \mp \sinh\chi)}{B^2(2\cosh\chi + \sinh\chi \mp \sinh\chi)}. \tag{3.24}$$

Obtenemos las soluciones consecuentes para la precesión LT, dadas por

$$\Omega_{+}^{\mathrm{MM}} = \frac{1}{r}, \tag{3.25a}$$

$$\begin{aligned}\Omega_{-}^{\mathrm{MM}} = \frac{1}{r} &+ r\sin^2\theta(B_x^2 + B_y^2 - E_z^2)\left(\frac{8\sinh\chi}{B^2(\cosh\chi+\sinh\chi)}\right) \\ &- 2r^2\sin^2\theta[(B_yB_z + E_yE_z)^2 + \sin^2\theta(B_x^2 + B_y^2 - E_z^2)^2]\left(\frac{8\sinh\chi}{B^2(\cosh\chi+\sinh\chi)}\right)^2 \\ &+ \left(\frac{r^2\cos\theta\sin\theta(B_xB_z + E_xE_z)}{2\left(1-\frac{2M}{r}\right)^2}\right)\left(1-\frac{2M}{r}\right)^3(B_yE_x - B_xE_y)\left(\frac{8\sinh\chi}{B^2(\cosh\chi+\sinh\chi)}\right)^2 \\ &- \left(\frac{r\sin^2\theta(B_xB_z + E_xE_z)}{2\left(1-\frac{2M}{r}\right)^2}\right)\left(1-\frac{3M}{r}\right)(E_xE_z + B_xB_z)\left(\frac{8\sinh\chi}{B^2(\cosh\chi+\sinh\chi)}\right)^2.\end{aligned} \tag{3.25b}$$

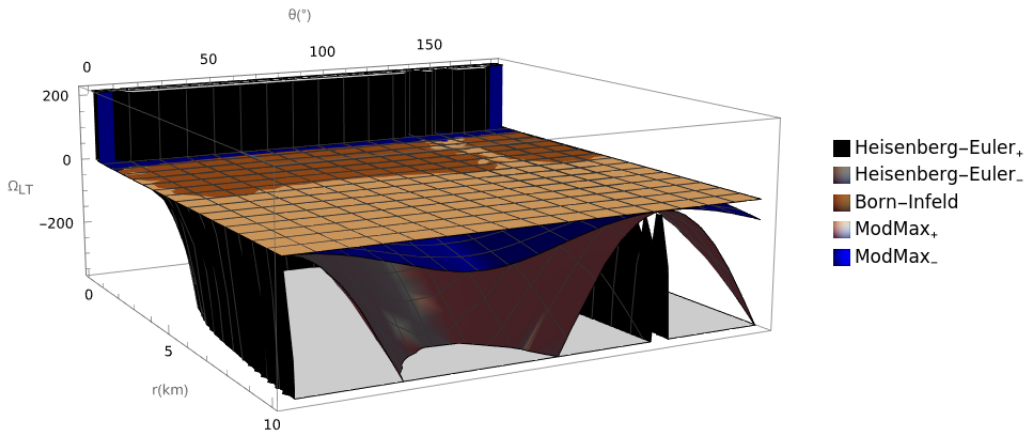


Figura 3.5: Al considerar las soluciones ModMax, se identifica una solución de comportamiento clásico y otra que surge como consecuencia de la birrefringencia en la métrica efectiva. Esta última presenta una menor rapidez para la precesión LT en comparación con las soluciones de HE, pero mayor que la de BI.

CONCLUSIONES

El estudio de fenómenos relacionados con cuerpos compactos durante este trabajo ha mostrado la relevancia de involucrar teorías de electrodinámica no lineal, sobre todo en estrellas de neutrones como consecuencia de sus campos electromagnéticos tan intensos. Por ello, el entender mejor como se comporta una métrica efectiva es de vital importancia para analizar los fenómenos detectables para cuerpos masivos.

En este sentido, cuando consideramos el corrimiento al rojo, la teoría muestra la influencia de las condiciones de equilibrio de la estrella y como estas afectan los efectos que sufrirá internamente el fenómeno. Por otra parte, las diferentes teorías al ser comparadas entre sí muestran su carácter dominante conforme se satisfagan ciertas condiciones para el campo eléctrico.

En el caso de la precesión de Lense-Thirring, cuando nos sometemos a condiciones externas, como la superficie de la estrella, se distingue como todas las direcciones de los campos intervienen en el fenómeno de precesión y a su vez como las correcciones ligadas a las NLEDs se ven presentes en efectos para las diferentes coordenadas consideradas.

Por su parte en lo referente a fenómenos de carácter electromagnético, la existencia de birrefringencia o no en las distintas teorías no deja de interferir en el retraso de señales por ondas electromagnéticas por lo que las geodésicas representan una mejor imagen sobre la relación entre gravitación y electromagnetismo.

En el sentido del análisis sobre el retraso de señales, la complejidad de las ecuaciones y el tiempo, solo permitieron realizar una generalización de como se comportaría una NLED para dicho efecto. Por ello es importante el futuro análisis completo de las diferentes teorías y sus consecuencias concretas

Finalmente, aún cuando existió la intención de utilizar herramientas de simulación, como el programa Athena referido en [Stone *et al.*(2020)Stone, Tomida, White, and Felker] y también GLADIS [Janiuk(2018)], la dificultad para manejar los programas y el tiempo para el proyecto no fueron propicios; por lo tanto, se presenta la posibilidad de un futuro proyecto que busque entender fenómenos como los discos de acreción u otros no considerados en este trabajo.

ANEXO A

EFECTOS OBSERVACIONALES

Como se ha visto en los capítulos anteriores, la electrodinámica no lineal ofrece una gama de herramientas muy amplia para el estudio de los cuerpos compactos, por ello debemos hacer una introducción en la consecuencia a nivel observacional y considerar los posibles efectos que se presenten.

Para poder analizar el efecto observacional, nos centraremos en la propagación de señales electromagnéticas para trayectorias meridionales como en el caso del trabajo realizado por [Denisov, Denisova, and Svertilov(2004)], por ello consideraremos geodésicas que involucran al término temporal y al azimutal, considerando el movimiento restringido al plano ecuatorial, esto con la intención de facilitar el análisis y resaltar la intervención de las NLEDs en el retraso de señales.

Considerando la ecuación geodésica general

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda}^2 + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\lambda}\frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0, \tag{A.1}$$

por lo que nuestras ecuaciones serían

$$\frac{d^2t}{d\lambda^2} + \Gamma^t_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\lambda}\frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0,$$

$$\frac{d^2\phi}{d\lambda^2}+\Gamma^{\phi}_{\alpha\beta}\frac{dx^{\alpha}}{d\lambda}\frac{dx^{\beta}}{d\lambda}=0.$$

Al hacer uso de las consideraciones del primer párrafo y considerando que (1.1) implica $\frac{d}{d\lambda}=\mathcal{K}^r\frac{d}{dr}$, las ecuaciones que usaremos para determinar el retraso en la señal son

$$\frac{d^2t}{dr^2}+\Gamma^{t}_{\alpha\beta}\frac{dx^{\alpha}}{dr}\frac{dx^{\beta}}{dr}=\frac{dt^2}{dr^2}+\Gamma^{t}_{tt}\left(\frac{dt}{dr}\right)^2+2\Gamma^{t}_{t\phi}\frac{dt}{dr}\frac{d\phi}{dr}+\Gamma^{t}_{\phi\phi}\left(\frac{d\phi}{dr}\right)^2=0, \tag{A.2a}$$

$$\frac{d^2\phi}{dr^2}+\Gamma^{\phi}_{\alpha\beta}\frac{dx^{\alpha}}{dr}\frac{dx^{\beta}}{dr}=\frac{d\phi^2}{dr^2}+\Gamma^{\phi}_{tt}\left(\frac{dt}{dr}\right)^2+2\Gamma^{\phi}_{t\phi}\frac{dt}{dr}\frac{d\phi}{dr}+\Gamma^{\phi}_{\phi\phi}\left(\frac{d\phi}{dr}\right)^2=0. \tag{A.2b}$$

En general, para la métrica efectiva con efectos externos de una NLED se tiene que las conexiones afines son

$$\Gamma^{t}_{tt}\equiv\tfrac{M[(4M-2r)E^2\psi_{\pm}-r][(2M-r)E^2\psi_{\pm}+r]}{2Mr^3-r^4}+2(r-M)[(B_zE_x-B_xE_z)^2+(B_yE_x-B_xE_y)^2]\psi_{\pm}^2, \tag{A.3a}$$

$$\begin{aligned}\Gamma^{t}_{t\phi}\equiv&-2r^3\sin^2\theta(B_zE_x-B_xE_z)(B_yB_z+E_yE_z)\psi_{\pm}^2\\&-(B_xE_y-B_yE_x)[r\sin^2\theta-2r^3\sin^4\theta(B_x^2+B_y^2-E_z^2\psi_{\pm})]\\&-r\sin\theta(B_yE_z-B_zE_y)\left[\frac{(B_xB_z+E_xE_z)\sin\theta}{1-\frac{2M}{r}}-\frac{Mr\sin\theta(B_xB_z+E_xE_z)}{(r-2M)^2}\right.\\&\left.+r\cos\theta\left(1-\frac{2M}{r}\right)(B_xE_y-B_yE_x)\right],\end{aligned} \tag{A.3b}$$

$$\begin{aligned}\Gamma^{t}_{\phi\phi}\equiv&\left(E^2\psi_{\pm}+\frac{r}{2M-r}\right)[2r^3\sin^4\theta(B_x^2+B_y^2-E_z^2)\psi_{\pm}-r\sin^2\theta]\\&-r^2\sin(2\theta)(B_yE_z-B_zE_y)\left[r^2\sin^2\theta(B_x^2+B_y^2-E_z^2)\psi_{\pm}-\frac{1}{2}\right]\psi_{\pm},\end{aligned} \tag{A.3c}$$

$$\Gamma^{\phi}_{\phi\phi}\equiv r\sin\theta[1-r^2(B_x^2+B_y^2-E_z^2)(\cos(2\theta)-1)\psi_{\pm}][r\cos\theta(B_xB_z+E_xE_z)+\sin\theta(B_xE_y-B_yE_x)]\psi_{\pm}, \tag{A.3d}$$

$$\Gamma^{\phi}_{tt} \equiv \frac{M}{r^3}(B_yE_x - B_xE_y)[(4M-2r)E^2\psi_{\pm} - r]\psi_{\pm} + 2(B_zE_x - B_xE_z)(B_yB_z + E_yE_z)(r-M)\psi^2_{\pm} + \frac{2\sin^2\theta}{r^2}(B_yE_x - B_xE_y)[\csc^2\theta + r^2(B_x^2 + B_y^2 - E_z^2)\psi_{\pm}](r-M)\psi_{\pm}, \quad \text{(A.3e)}$$

$$\Gamma^{\phi}_{t\phi} \equiv \frac{1}{r} - 2r^3\sin^2\theta[(B_yB_z + E_yE_z)^2 + \sin^2\theta(B_x^2 + B_y^2 - E_z^2)^2]\psi^2_{\pm} - r\sin^2\theta(B_x^2 + B_y^2 - E_z^2)\psi_{\pm} + \left(\frac{r\sin\theta(B_xB_z + E_xE_z)}{2\left(1-\frac{2M}{r}\right)^2}\right)\left[r\cos\theta\left(1-\frac{2M}{r}\right)^3(B_yE_x - B_xE_y) - \sin\theta\left(1-\frac{3M}{r}\right)(E_xE_z + B_xB_z)\right]\psi^2_{\pm}. \quad \text{(A.3f)}$$

Al resolver las ecuaciones (A.2) utilizando las definiciones anteriores, la integración se torna compleja, lo que hace necesario el uso de métodos numéricos para su solución. Por lo tanto, en este momento es suficiente con presentar las ecuaciones generales. Si es necesario, se deben emplear las expresiones $\psi_{\pm}$ establecidas en (1.32), (2.12) y (3.24) para las teorías Heisenberg-Euler, Born-Infeld y ModMax respectivamente.

AGRADECIMIENTOS

Antes que nada agradezco al Dr Marco Maceda de nueva cuenta por su apoyo, no solo a lo largo del proyecto sino a lo largo de toda la carrera, por su consejo y el tiempo que se ha tomado para responder a cada una de mis dudas. Además me gustaría agradecer al Dr Octavio Pimentel, tanto su guía en el estudio de ondas gravitacionales como su enfoque pragmático me fueron de gran utilidad a lo largo de este proyecto.

Gracias a los que ya no están, a Johnatan Macías porque sin su guía no sería quién soy, a Nino Gutiérrez por todos los consejos y el consuelo que me dio, a Gabriela Torres porque me hizo ver que siempre podemos seguir adelante. A todos ellos porque aún cuando ya no están me motivan a ser mejor.

Principalmente le agradezco a la UAM porque me permitió perseguir mi más grande sueño desde que tenía once años, porque hoy estoy más cerca de lo que quiero lograr y es gracias a la oportunidad que la universidad y muchos de sus profesores me dieron. Gracias a eso puedo continuar adelante en la rama de la astrofísica y la gravitación.

Finalmente, gracias Alexia Jovana López Córtes porque cuando creí que no podría tú me motivaste a volver a intentarlo y gracias a eso estoy aquí.

BIBLIOGRAFÍA

[Bandos *et al.*(2020)Bandos, Lechner, Sorokin, and Townsend] Bandos, I., Lechner, K., Sorokin, D., and Townsend, P. K., Physical Review D **102**, 121703 (2020).

[Chatterjee, Chakraborty, and Bandyopadhyay(2017)] Chatterjee, D., Chakraborty, C., and Bandyopadhyay, D., Journal of Cosmology and Astroparticle Physics **2017**, 062 (2017).

[Cuesta and Salim(2004)] Cuesta, H. J. M.and Salim, J. M., The Astrophysical Journal **608**, 925 (2004).

[De Lorenci *et al.*(2000)De Lorenci, Klippert, Novello, and Salim] De Lorenci, V., Klippert, R., Novello, M., and Salim, J., Physics Letters B **482**, 134 (2000).

[Denisov, Denisova, and Svertilov(2004)] Denisov, V. I., Denisova, I. P., and Svertilov, S. I., Theoretical and mathematical physics **140**, 1001 (2004).

[Denisov and Svertilov(2005)] Denisov, V. I.and Svertilov, S. I., Physical Review D—Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology **71**, 063002 (2005).

[Gibbons and Herdeiro(2001)] Gibbons, G.and Herdeiro, C., Classical and Quantum Gravity **18**, 1677 (2001).

[Guzman Herrera(2024)] Guzman Herrera, E., *Comparative of light propagation in Born-Infeld, Euler-Heisenberg and ModMax nonlinear electrodynamics*, Ph.D. thesis, CINVESTAV Zacatenco (2024).

[Hartle(2021)] Hartle, J. B., *Gravity: an introduction to Einstein's general relativity* (Cambridge University Press, 2021).

[Hehl and Obukhov(2005)] Hehl, F. W.and Obukhov, Y. N., Foundations of Physics **35**, 2007 (2005).

[Jactthar Escamilla(2024)] Jactthar Escamilla, E. I., "Conexiones astrofísicas: Electrodinámica no lineal desde agujeros negros a estrellas de neutrones. Parte I," (2024).

[Janiuk(2018)] Janiuk, A., "GLADIS: GLobal Accretion Disk Instability Simulation," Astrophysics Source Code Library, record ascl:1812.002 (2018).

[Kruglov(2017)] Kruglov, S., Annals of Physics **383**, 550 (2017).

[Kruglov(2021)] Kruglov, S., Physics Letters B **822**, 136633 (2021).

[Kruglov(2022)] Kruglov, S., International Journal of Modern Physics D **31**, 2250025 (2022).

[Lämmerzahl and Hehl(2004)] Lämmerzahl, C.and Hehl, F. W., Physical Review D—Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology **70**, 105022 (2004).

[Mosquera Cuesta and Salim(2004)] Mosquera Cuesta, H. J.and Salim, J. M., Monthly Notices of the Royal Astronomical Society **354**, L55 (2004).

[Papapetrou(1974)] Papapetrou, A., *Lectures on general relativity* (D. Reidel Publishing Company, 1974).

[Plebański(1970)] Plebański, J., *Lectures on Non-linear Electrodynamics* (NORDITA, 1970).

[Schellstede, Perlick, and Lämmerzahl(2016)] Schellstede, G. O., Perlick, V., and Lämmerzahl, C., Annalen der Physik **528**, 738 (2016).

[Shabad and Usov(2011)] Shabad, A. E.and Usov, V. V., Phys. Rev. D **83**, 105006 (2011).

[Stone *et al.*(2020)Stone, Tomida, White, and Felker] Stone, J. M., Tomida, K., White, C. J., and Felker, K. G., The Astrophysical Journal Supplement Series **249**, 4 (2020).